MATEMÁTICA BÁSICA CLASE 20-21

SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS

PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITAN0

MEDELLÍN OCTUBRE 2011

SISTEMAS DE ECUACIONES

- **Hasta ahora se ha trabajado en general con ecuaciones de una sola variable. Una variable describe un solo comportamiento de una situación dada.**

- **Pero una variable no es suficiente en muchas ocaciones para describir o modelar las situaciones complejas del mundo real.**

- Efrén Giraldo Toro
- **Así: la vida de una máquina depende del material del que está hecha, de su manejo adecuado, del tiempo de uso y de otros factores.**

- **La salud depende de una buena alimentación, de un ambiente apropiado, y de otros factores también.**

- **Por tanto los sistemas reales dependen de muchas variables o condiciones. Y para eso se desarrollaron las ecuaciones simultaneas.**
- **Un** *<u>sistema de ecuaciones</u>* **es un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen las mismas variables y trabajan conjuntamente o simultanamente. O sea que coinciden en algunos valores de sus variables. Estos valores se llaman la solución del sistema**

Ejemplos de ecuaciones con dos incógnitas

1) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 10 \\ \frac{3}{4}x - y = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

(Hernández, 2011).

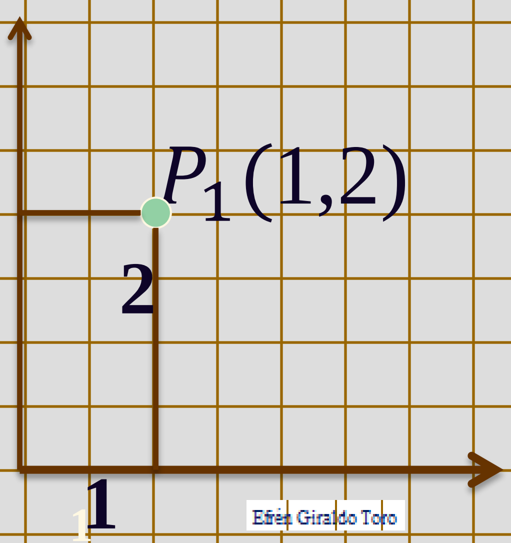
Conceptos básicos sobre líneas rectas

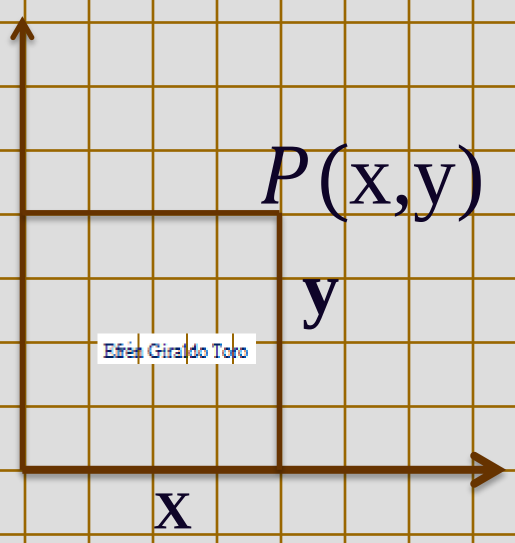
- Antes de entrar a sistemas de ecuaciones es importante conocer un poco más sobre las líneas rectas.
- Una línea recta algunas veces se describe por una ecuación de una sola incógnita si está en una sola dimensión. O sea, si está solo el eje x o solo en el eje y.
- Debido a que en general una línea recta está en dos dimensiones y a veces en 3, o sea que involucra tanto a x como a y ó z, depende o es función tanto de x como y ó z.

Ecuaciones de líneas rectas

- Una línea recta está determinada por dos puntos. Si se conocen esos puntos o sea sus coordenadas, se conocerá la ecuación de la línea recta.

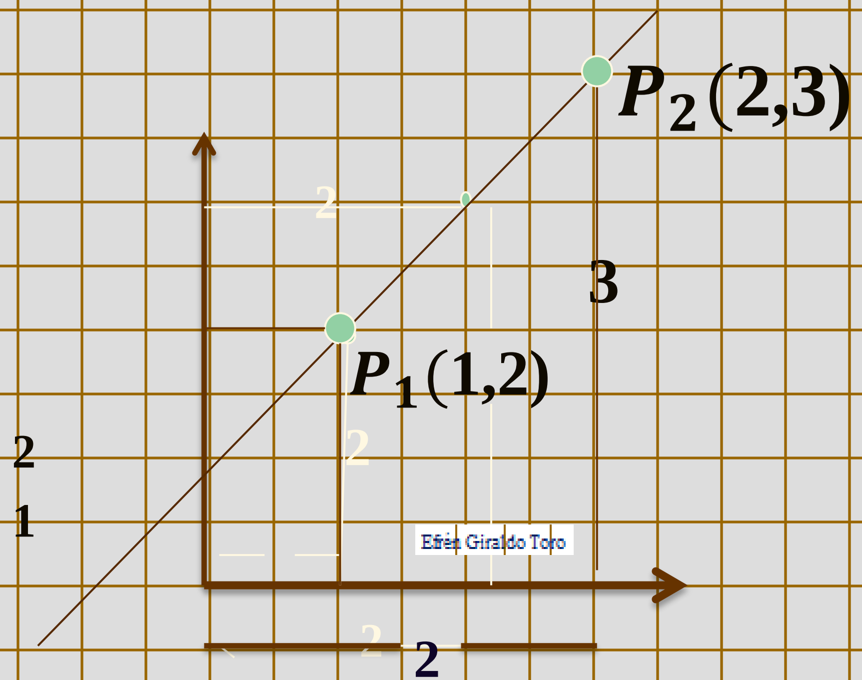
- Un punto $P_1(1,2)$ o P(x,y) en el plano cartesiano se representa así:





- **Pendiente de una línea recta**

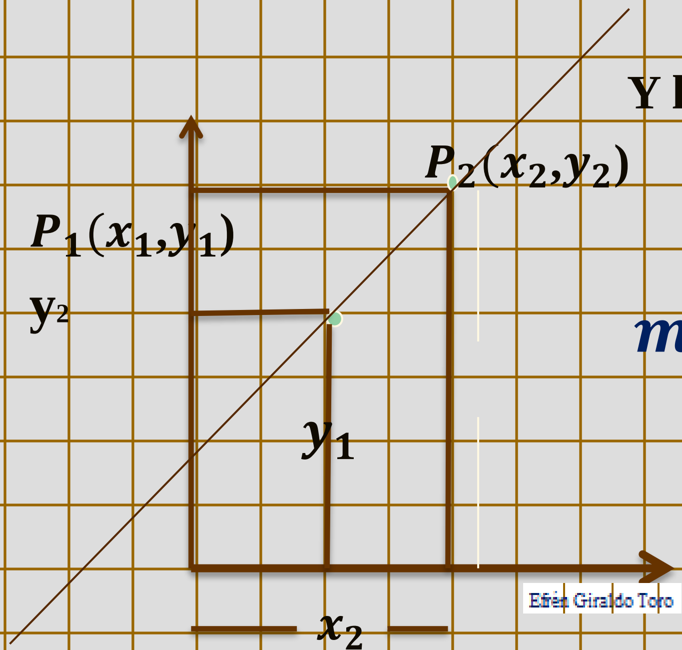
- **Dos puntos $P_1(1{,}2)$ y $P_2(2{,}3)$ en el plano, definen una línea recta**



La pendiente m se define así:

$$m = \frac{(diferencia\ entre\ las\ y)}{(diferencia\ entre\ las\ x)} = \frac{(3-2)}{(2-1)} = 1$$

- **Generalizando: dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en el plano, definen una línea recta :**



Y la pendiente de la recta se define así:

$$m = \frac{(\textit{diferencia entre las } y)}{(\textit{diferencia entre las } x)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

x_1

- Por tanto la pendiente m es sencillamente la resta de las y sobre la resta de las x y significa el grado de inclinación de la recta con respecto al eje x

- Puesto que la pendiente depende de dos puntos y la línea recta también, la ecuación de la pendiente describe también a la línea recta

$$\boldsymbol{m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}}$$

- Si se hace general, o sea dejando uno de los puntos variable **P(x,y)** y el otro fijo o conocido $\boldsymbol{P_1(x_1,y_1)}$**,** la ecuación quedará así:

- $\boldsymbol{m = \frac{(y - y_1)}{(x - x_1)}} \longrightarrow \boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$ **(1)**

- **Primera ecuación de la línea recta**

- $y - y_1 = m(x - x_1)$ (1)

- Es la ecuación de la línea recta cuando se conocen la pendiente m y un punto $P_1(x_1, y_1)$. Si en esta se coloca el valor de la ecuación de la pendiente m, da otra ecuación:

- $y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$ (2)
- Ecuación de la línea recta conocidos dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$.

- $y = mx + b$ (3)
- Es otra ecuación de la línea recta conocidos la pendiente m y el intercepto b sobre el eje y

- $Ax + By + C = 0$ (4)

- **Es la ecuación general de la línea recta**

- Estas 4 ecuaciones son equivalentes y por tanto si se tiene una, se puede convertir fácilmente a cualquiera de las otras.

Determinación de la ecuación de una recta por medio de dos puntos dados

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4-2}{3-(-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) \quad (2)$$

- Ahora se tiene el punto $P_1(x_1, y_1) = P_1(-1,2)$

- **La ecuación quedará así:**

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x+1)$$
$$2y - 4 = -3x - 3$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

Podemos utilizar *cualquier* punto, $(-1, 2)$ *o bien* $(3, -4)$, en la ecuación

Llegaremos a la misma respuesta final.

(Stewart,2007)

- Calcular la ecuación de una línea recta dados la pendiente m y el intercepto b en el eje y

- Se da m = 2 y b = 3
- Se toma la ecuación $\boldsymbol{y = mx + b}$**(3)**

- **y= 2x+ 3**

- Se da cualquier ecuación de la línea recta y se pide hallar la pendiente y el intercepto sobre el eje y.
- Ecuación: 2y-3x= 2
- Se trata de convertirla a la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$ **(3)** porque m y b son conocidos.
- Dejar solo la **y** al lado izquierdo

2y= 2+3x

$$y=\frac{2+3x}{2}\frac{2}{2}+\frac{3x}{2}=1+1.5x \qquad \boldsymbol{y = 1.5x + 1}$$

- **Por tanto** $\boldsymbol{m = 1,5 \ \ y \ \ b = 1}$

- Se dan un punto $\boldsymbol{P_1(x_1,y_1)}$ **y m**

Efrén Giraldo Toro

$\boldsymbol{P_1}$(5,3) y m=2 hallar la ecuación

Efrén Giraldo Toro

- **Se toma** $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$ **(1)**

Efrén Giraldo Toro

- $\boldsymbol{y - 3 = 2(x - 5)}$

Gráficas de líneas rectas

- Graficar líneas rectas en muy sencillo.

- Basta con obtener dos puntos, graficarlos en el plano cartesiano y hacer pasar la recta por esos dos puntos. Se supone un valor de x y se reemplaza en la ecuación y se obtiene y.

- Luego se supone otro valor de x y se hace lo mismo.

- Sea la ecuación 2y+3x= 2 ya vista
  $y = 1.5x + 1$

- Suponer x = 2 $y = 1.5(2) + 1$ =4

- Por tanto un punto es $P_1(2,4)$

- Suponer x= 1 $y = 1.5(1) + 1$= 2.5

- Por tanto el otro punto es $P_2(1, 2.5)$

- Se grafican y se traza la línea recta por esos puntos

- O se utiliza una calculadora graficadora o el computador

Ejercicio sobre graficación

La intersección con el eje **y** se hace haciendo **x=0** en la ecuación. La intersección con el eje **x** se hace haciendo **y=0** en la ecuación.

Ejemplo 6 **Gráfica de una ecuación lineal**

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

Solución 1 Puesto que la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para dibujar la gráfica es suficiente encontrar dos puntos cualesquiera sobre la recta. Las intersecciones con los ejes son los puntos más fáciles de determinar.

Intersección con el eje x: sustituya $y = 0$ para obtener $2x - 12 = 0$, de modo que $x = 6$

Intersección con el eje y: sustituya $x = 0$ para obtener $-3y - 12 = 0$, de modo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica en la figura 11.

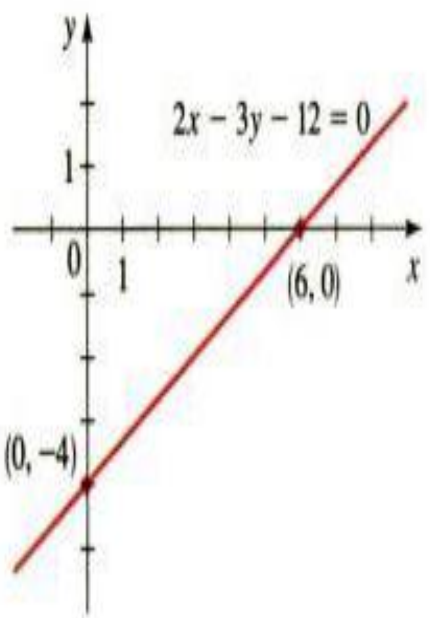
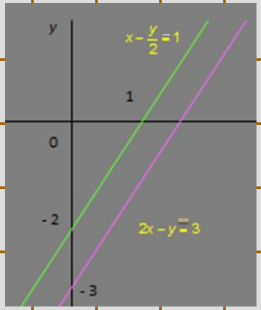


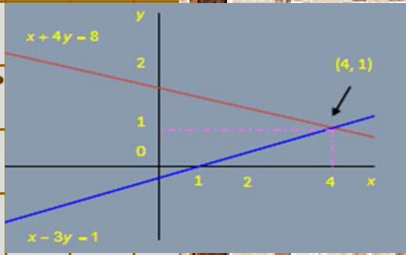
Figura 11

(Stewart,2007)

- Si dos rectas son paralelas es obvio que no se interceptan y tienen la misma inclinación con respecto al eje x, y por lo tanto la misma pendiente: $m_1 = m_2$



- Si se interceptan el punto de intersección es común y cumple o satisface la dos ecuaciones.



- Si son perpendiculares el producto de sus pendientes es -1 $m_1 . m_2 = -1$

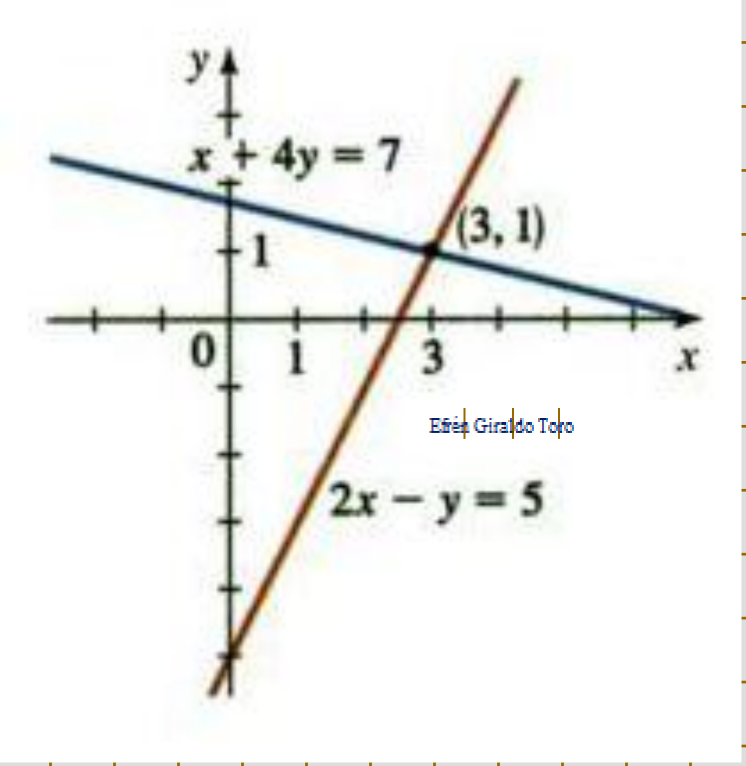
- <u>Una solución de una ecuación</u>, son los valores de cada una de las variables que hacen que cada ecuación del sistema se cumpla.

- **Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar las soluciones o valores del sistema**

- **Una solución es un par ordenado (x, y) que satisface cada una de las ecuaciones del sistema.**

- **La solución es el punto de intersección de las 2 gráficas de las 2 ecuaciones**

- Un sistema se define como 2×2 si tiene 2 ecuaciones y 2 incógnitas
- 3×3 si tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas
- Y así sucesivamente…



- El punto (3,1) es la intersección de las 2 rectas y por tanto es la solución de las 2 ecuaciones correspondientes

Definición

Una solución de un sistema 2x2 es un par ordenado *(x,y)* que hace cierta cada una de las 2 ecuaciónes del sistema.

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en encontrar el conjunto de todas las soluciones del sistema. El conjunto formado por todas las soluciones de un sistema de ecuaciones se conoce como el conjunto solucion del sistema.

- Un sistema lineal puede no tener solución si las rectas son paralelas(no tienen punto en común)

- Puede tener infinitas soluciones. ***El sistema se llama indeterminado o dependiente***. Esto ocurre cuando las ecuaciones o rectas terminan siendo las mismas.

- O una solución cuando se interceptan en un punto cuyas coordenadas corresponden a la solución del sistema. Un sistema que tiene solución única, se llama ***sistema determinado, compatible, consistente o independiente.***

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

COMPATIBLE

Determinado: solución única.

COMPATIBLE

Indeterminado : infinitas soluciones.

INCOMPATIBLE

CONJUNTO SOLUCIÓN VACIO

(UPC, 2011)

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones a fin de eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & 4 \times \text{ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & 3 \times \text{ecuación 2} \end{cases}$$

(Stewart,2007)

Se puede observar que las dos ecuaciones en el sistema original son simplemente modos distintos de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta son una solución del sistema. Al escribir la ecuación en la forma de ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Entonces, si t representa cualquier número real, se puede escribir la solución como

Asimismo, se puede escribir la solución en la forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones (véase la figura 4). ■

En el ejemplo 3, para llegar a soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, se obtiene la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Si $t = 4$, se obtiene la solución $(4, 0)$. Para cada valor de t tenemos una solución diferente. (Véase la figura 4.)

(Stewart,2007)

Verificar si cada par ordenado es una solución del sistema de ecuaciones correspondiente. Es reemplazar en cada ecuación los valores de x y y y ver si cumplen cada ecuación.

$$1)\quad \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Par Ordenado}: (1, 2)}$$

$$\underline{Verificación:}$$

$$2(1) + 2 \neq 6$$

$$3(1) - 2 \neq 4$$

Por lo tanto el par ordenado $(1\ ,\ 2)$ no es solución.

(Hernández, 2011).

31

Par Ordenado: $(-1\,,6)$

2) $\begin{cases} x^2 - y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

$\underline{\textit{Verificación}:}$

$$(-1)^2 - 6 = -5$$

$$2(-1) + 6 = 4$$

Por lo tanto el par ordenado $(-1\,,6)$ *es solución.*

(Hernández, 2011).

Métodos de resolución de ecuaciones simultaneas

- **Por el método gráfico**

- **Por el método de sustitución**

- **Por el método de eliminación**

- **Por determinantes**

MÉTODO GRÁFICO PARA SISTEMAS 2X2

Generalmente se usa una calculadora graficadora o un computador.

Este método es útil si podemos leer con precisión los puntos de intersección entre las gráficas. Además en algunas calculadoras se debe expresar y= f(x) y hay ocasiones en que esto es difícil.

Procedimiento

1. **Las soluciones del sistema de ecuaciones serán los puntos de intersección entre las dos gráficas.**

2. **Construir la gráfica de cada ecuación**
3. **Halle los puntos de intersección. Las soluciones del sistema de ecuaciones serán las coordenadas de los puntos de intersección de las dos gráficas.**

La gráfica de cada ecuación de un sistema 2x2 de ecuaciones lineales, es una ***recta***. Por lo que el método gráfico:

Consiste en representar gráficamente las ecuaciones del sistema para determinar (si la hay) la intersección de las rectas que las representan.

Ejemplo 7 Resolver gráficamente el sistema $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Solución Se tabulan las ecuaciones despejando y en cada una de ellas:

$y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0

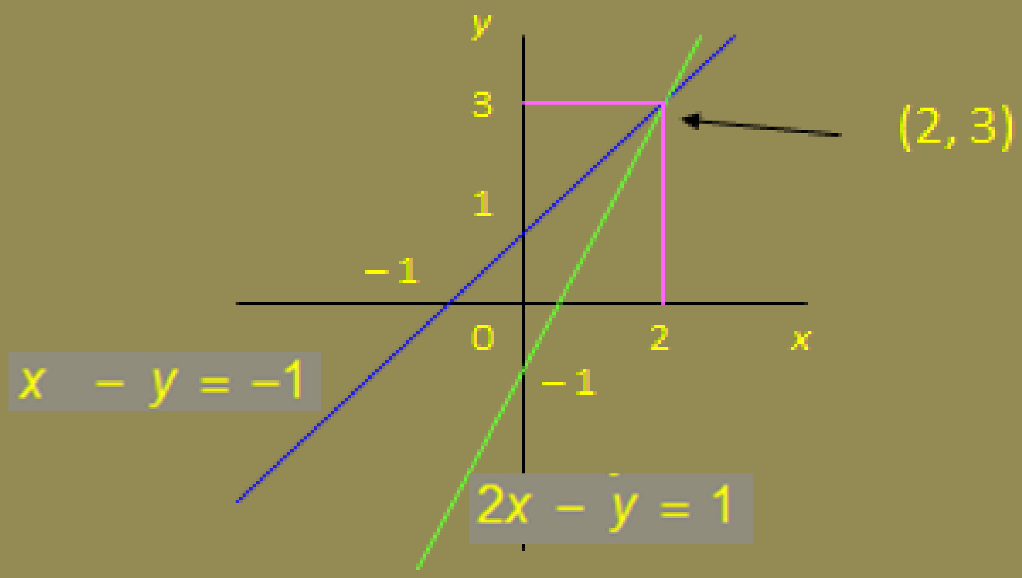
$y = 2x - 1$

x	0	2
y	-1	3

Efrén Giraldo Toro

(Hernández, 2011).

Representando gráficamente las parejas ordenadas (x, y) de cada tabla en el plano cartesiano, se trazan las correspondientes rectas para determinar la solución. Observe:



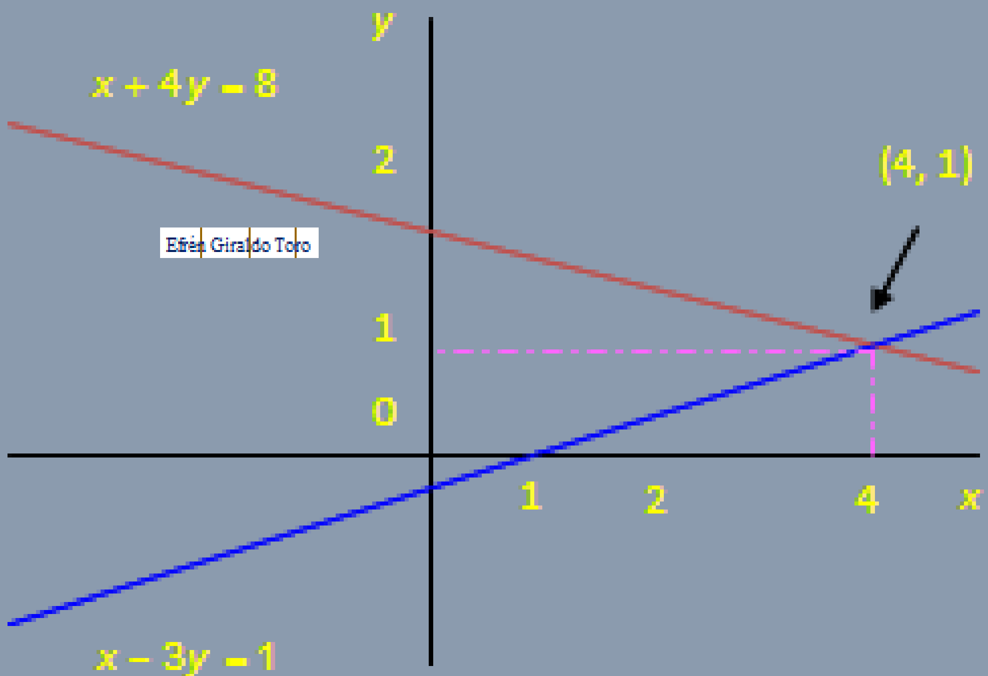
El punto de coordenadas $(2, 3)$ es la intersección de las rectas que son gráficas de las ecuaciones del sistema, entonces la solución es:

$x = 2 \quad y = 3$

(Hernández, 2011).

06/10/2011 Elaboró Efrén Giraldo Toro

El sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$ tiene solución única. Observe:

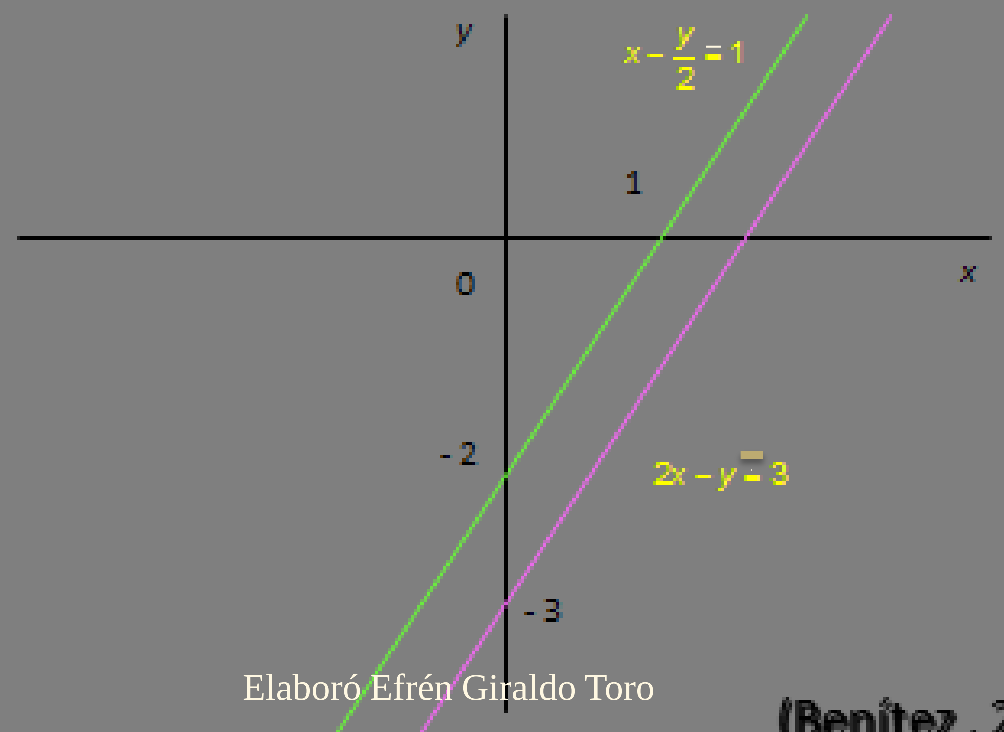


(Benítez , 2011)

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Un sistema que no tiene solución alguna, se llama *sistema inconsistente o incompatible*, y se caracteriza en que las gráficas de las ecuaciones que lo forman son rectas paralelas(pendientes iguales) y distintas entre sí.

Ejemplo 11 El sistema $\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ no tiene solución. Observe:

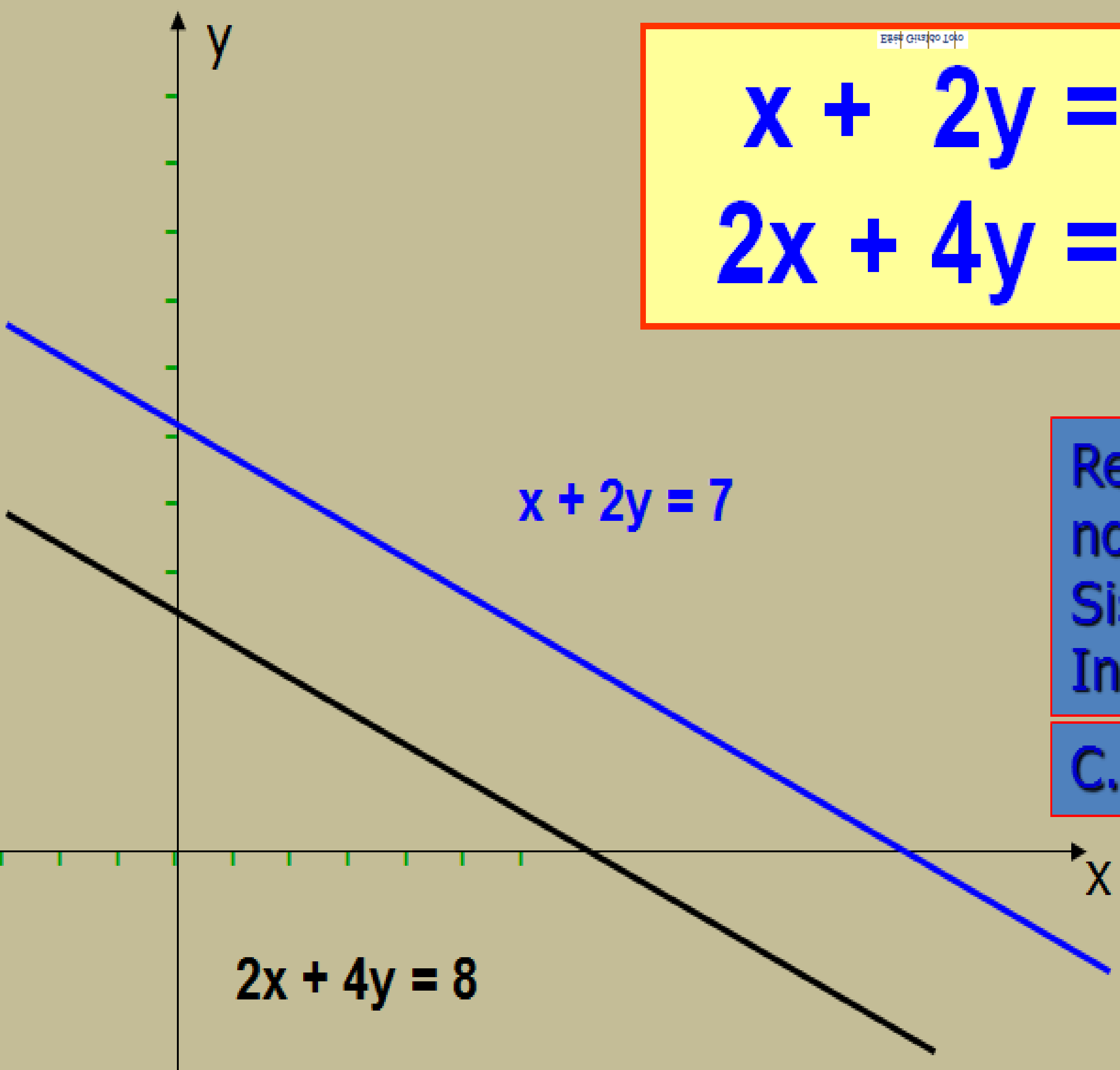


(Benítez , 2011)

06/10/2011 Elaboró Efrén Giraldo Toro 4

Interpretación geométrica

$$x + 2y = 7$$
$$2x + 4y = 8$$



Rectas paralelas: no admite solución. Sistema Incompatible

C.S. = Ø

Efrén Giraldo Toro

(Benitez,2011)

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN PARA SISTEMAS 2X2

PROCEDIMIENTO

1. Despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones.

2. Sustituir la variable obtenida en la otra ecuación. Esto deja la ecuación con una sola variable y despejando esa variable se obtiene su valor.

3. Sustituir el valor de la variable del paso anterior en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplos:

Resolver por el *método de sustitución.*

1) $$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Escogiendo la ecuación, $2x + y = 6$,

$$y = 6 - 2x$$

Sustituyendo en la otra ecuación tenemos,

$$3x - (6 - 2x) = 4$$

$$3x - 6 + 2x = 4$$

$$\boxed{x = 2}$$

(Hernández, 2011).

Sustituyendo el valor obtenido en la primera ecuación tenemos

$$y = 6 - 2(2) = 2$$

$$\boxed{Conjunto\ Solución = \{(2\ ,2)\}}$$

2) $\begin{cases} x^2 + y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Escogiendo la ecuación, $x^2 + y = -5$, tenemos

$$y = -5 - x^2$$

Sustituyendo en la otra ecuación tenemos,

$$2x - \left(-5 - x^2\right) = 4$$

$$2x + 5 + x^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)(x+1) = 0$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$x + 1 = 0$$

(Hernández, 2011).

Sustituyendo el valor obtenido en la primera ecuación tenemos,

$$x^2 + y = -5$$

$$y = -5 - x^2$$

$$y = -5 - (-1)^2 = -6$$

$$\boxed{Conjunto\ Solución = \{(-1\ ,\ -6)\}}$$

(Hernández, 2011).

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}y=10 \\ \dfrac{3}{4}x-y=4 \end{cases}$

Escogiendo la ecuación, $\dfrac{3}{4}x-y=4$, tenemos

$$y=\frac{3}{4}x-4$$

Sustituyendo en la otra ecuación tenemos,

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x-4\right)=10$$

(Hernández, 2011).

$$\frac{1}{2}x+\frac{9}{16}x-3=10$$

Multiplicando la ecuación por 16 tenemos,

$$8x+9x-48=160$$

$$17x=160+48$$

$$\boxed{x=\frac{208}{17}}$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$y=\frac{3}{4}\left(\frac{208}{17}\right)-4$$

$$y=\frac{3}{4}x-4$$

$$\boxed{y=\frac{88}{17}}$$

$$\boxed{C.S.=\left\{\left(\frac{208}{17},\frac{88}{17}\right)\right\}}$$

(Hernández, 2011).

Método de Eliminación por Adición.

Este método es importante porque en el se basa el Método de Gauss para sistemas múltiples.

Consiste en arreglar las ecuaciones de tal manera que se puedan sumar o restar con el objetivo que se vaya eliminando una de las variables.

Procedimiento:

1. Igualar los coeficientes de una de las variables multiplicando las ecuaciones por los números correspondientes de tal manera que se elimine una de las variables.

2. Sumar o restar las ecuaciones para eliminar la variable.

3. Repetir el proceso para la otra variable. Este paso se puede reemplazar por una sustitución.

47

1) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 obtenemos,

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -2x-4y=-10 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones obtenemos,

$$2x-3y=3$$

$$\underline{-2x-4y=-10}$$

$$0x-7y=-7$$

(Hernández, 2011).

$$-7y=-7$$

$$\boxed{y=1}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -3 y la primera por 2

obtenemos,

$$\begin{cases} 2(2x-3y=3) \\ 3(x+2y=5) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4x-6y=6 \\ 3x+6y=15 \end{matrix}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos,

$$4x-6y=6$$

$$\underline{3x+6y=15}$$

$$7x+0y=21$$

(Hernández, 2011).

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

$$\boxed{C.S. = \{(3,\ 1)\}}$$

El sistema es consistente independiente.

Observación:

Para encontrar el valor de la segunda variable se puede usar el método de sustitución.

Sustituyendo y = 1 en la ecuación, $x + 2y = 5$

$$x + 2(1) = 5$$

$$x = 3$$

(Hernández, 2011).

2) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -4x+6y=6 \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 2 obtenemos,

$$\begin{cases} 2(2x-3y=3) \\ -4x+6y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 4x-6y&=6 \\ -4x+6y&=6 \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos,

$$4x-6y=6$$

$$-4x+6y=6$$

$$0x+0y=12$$

$$0=12$$

Falso

$$\boxed{C.S.=\varnothing}$$

El sistema es inconsistente.
No tiene soluciones.

(Hernández, 2011).

$$3)\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -4x+6y=-6 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 obtenemos,

$$\begin{cases} 2(2x-3y=3) \\ -4x+6y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4x-6y=6 \\ -4x+6y=-6 \end{matrix}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos,

$$\begin{array}{r} 4x-6y=6 \\ -4x+6y=-6 \\ \hline 0x+0y=0 \end{array}$$

$0=0$ Cierto

El sistema es dependiente.
Tiene infinitas soluciones.

$$C.S.=\left\{\left(x,\frac{3-2x}{2}\right):x\in R\right\}$$

(Hernández, 2011).

Aplicaciones:

1. El precio de un boleto para cierto evento es de $2.25 para adultos y $1.50 para niños. Si se venden 450 boletos para un total de $ 777.75; ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

Solución:

Sea x el número de boletos vendidos de adultos.

Sea y el número de boletos vendidos de niños.

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 450 \\ 2.25x + 1.50y = 777.75 \end{cases}$$

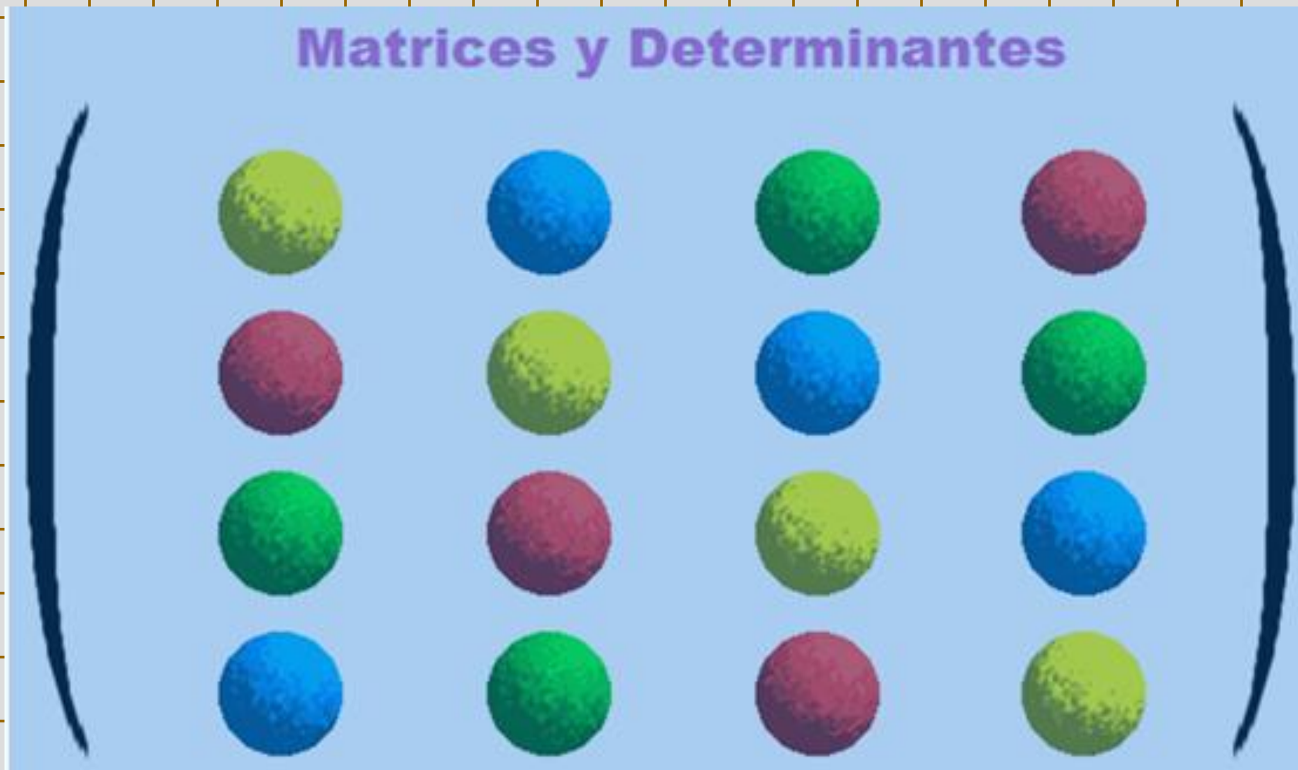
(Hernández, 2011).

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos,

$$x = 137 \text{ boletos de adultos}$$

$$y = 313 \text{ boletos de niños}$$

(Hernández, 2011).


Matrices y Determinantes

MATRICES

- Una **matriz** es una tabla cuadrada o rectangular de datos ordenados en **renglones** o **filas horizontales** y **columnas** verticales. Si *m* son los renglones y *n* las columnas se le denomina matriz de orden ($m \times n$), y a *m* y *n* **dimensiones** de la matriz.

- Dos matrices se dice que son iguales si son del mismo orden y tienen los mismos elementos.

- Las matrices se denotan con letras mayúsculas, y las correspondientes letras en minúsculas denotan a los elementos de las mismas.

- Así, una matriz $\mathbf{A}_{i,j}$ indica que tiene i renglones y j columnas. Un elemento $a_{\mathrm{i,j}}$ indica que ese elemento se encuentra en la el reglón i y en la columna j, $a_{2,3}$ es un elemento que está en el renglón 2 y en la columna 3

- El determinante de una matriz es un número asociado con esa matriz y se halla mediante ciertas operaciones específicas.

SISTEMAS DE CRAMER

Sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:

- El **número de ecuaciones** es igual al **número de incógnitas**. O sea, sistemas donde el número de filas es igual a número de columnas m.m
- El **determinante** de la matriz de los coeficientes es **distinto de cero**.

MANERA DE HALLAR DETERMINANTES DE UNA ECUACIÓN 2×2

1. **Primero se organizan muy bien las ecuaciones de tal manera que las x estén debajo de las x, las y debajo de las *y* (y de la z si es 3.3) y los términos independientes deben ir al lado derecho del signo igual de las ecuaciones.**

2. **Se toman sólo los coeficientes de la x y de la y(y de la z si es 3.3) con sus respectivos signos y se colocan en el mismo lugar que ocupaban en las ecuaciones originales. Se encierran todos los coeficientes entre dos corchetes verticales. Esta es la matriz que corresponde a las ecuaciones dadas.**
3. **El determinante general es sencillamente los valores de la matriz encerrados entre barras.**
4. **El valor del determinante general de la ecuación o simplemente el <u>determinante</u> se halla así:**

MATRICES 2.2 Y SUS DETERMINATES

(1) $\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$

(2) MATRIZ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(3) Determinante General de la Ecuación $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

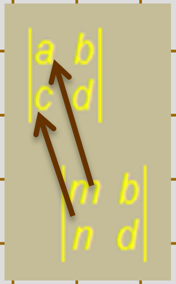
(4) Valor del determinante general $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

(Benítez , 2011)

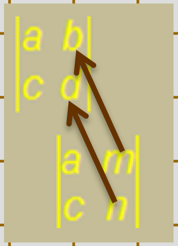
- Determinantes de la x Dx, de la y Dy

- Para hallar el determinante asociado a x Dx se procede así:
- Se toma la matriz general, se reemplazan los respectivos valores de x por los respectivos términos independientes

- Lo mismo se hace con Dy en las respectivas posiciones

- 

$$D_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$$

- 

$$D_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$$

- Y la solución se obtiene así:

Efrén Giraldo Toro

- $X = \dfrac{D_x}{\text{Determinante general}} = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{(md-nb)}{(ad-cb)}$

Efrén Giraldo Toro

- $Y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{(an-cm)}{(ad-cb)}$

Efrén Giraldo Toro

Ejemplo Resolver por determinantes el sistema $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(2)-(1)(-2)}{(1)(2)-(3)(-2)} = \frac{8}{8} = 1$$

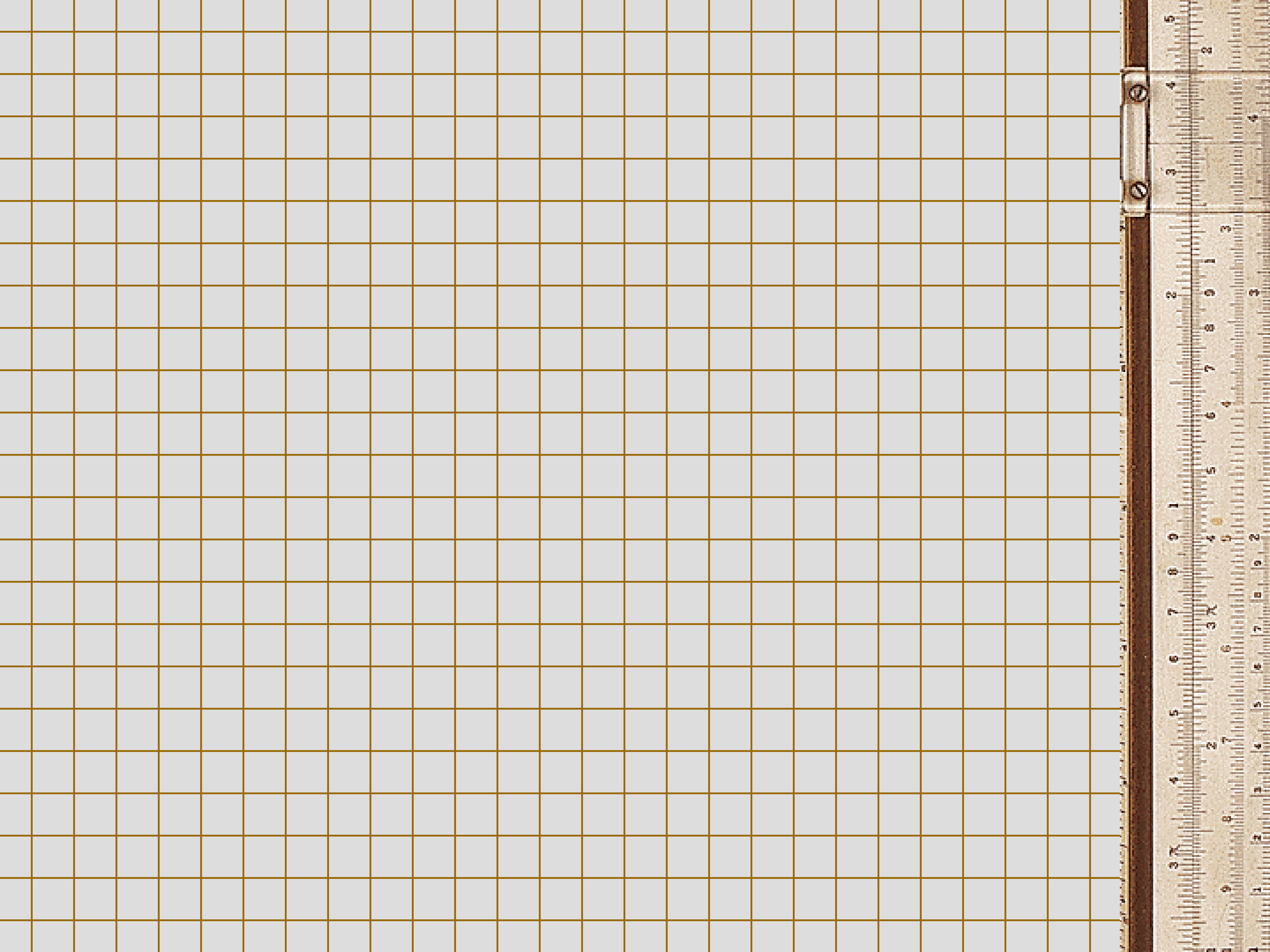
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(1)-(3)(3)}{(1)(2)-(3)(-2)} = \frac{-8}{8} = -1$$

Ejemplo 6 Resolver por determinantes el sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$

Solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{28}{7} = 4, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1$$

(Benítez, 2011)



SISTEMAS TRINGUALARES O ESCALONADOS

- **Son aquellos en que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Son muy sencillos de resolver, pues se conoce el valor de una de las variables, además otra de las ecuaciones posee solo dos incógnitas.**
- **x- 2y- z = 2 (1)**
- **y + 2z= 5 (2)**
- **z= 1 (3)**

- Se comienzan resolviendo obviamente hacia arriba.
- Por tanto se reemplaza el valor de la z en la en la ecuación (2) y se obtiene la y
- Luego se remplazan los valores hallados en la ecuación (1) y se obtiene x

$y + 2z = 5$ se arranca con (2) →

$y + 2\times1 = 5$ reemplazar el valor $z = 1$

$y = 3$

$x - 2y - z = 2$ (1) reemplazar $z=1$ $y=3$

$x - 2\times3 - 1 = 2$ $x = 2+7 = 9$

Por tanto la solución es (1,3,9)

- Otro ejemplo
- $x + y + \quad z = \ 3$

$$y + 2z = -1$$

$$z = -1$$

Efrén Giraldo Toro

- Si vamos a la 3ª ecuación, tenemos que
- $z = -1$.
- Sustituyendo su valor en la 2ª obtenemos

$y = 1$.

- Y sustituyendo en la 1ª los valores anteriores tenemos que $x = 3$.

http://www.vitutor.com/algebra/sistemas%20I/esc.html

Sistemas no triangulares

- Se trata de llevarlos a sistemas triangulares

¿De los 2 sistemas, cuál es más fácil de resolver?

$$\begin{cases} 2x - y + z = 9 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y + 2z &= -1 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

El método de eliminación de Gauss convierte un sistema normal en uno escalonado

Este método permite:

1- Multiplicar todos los términos de una ecuación por un # distinto de cero.

2- Sumar o restar a una ecuación un múltiplo de otra y obtener una ecuación equivalente que se incorpora al sistema.

3- Intercambiar de lugar dos ecuaciones.

Las 3 transformaciones elementales anteriores, pueden efectuarse sobre **cualquier sistema de ecuaciones lineales.**

- Para transformar el sistema en uno que sea escalonado se combinarán las ecuaciones entre sí (sumándolas, restándolas, o multiplicándolas por un número , etc.)

PROCEDIMIENTO

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Queremos conseguir esto}} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 0+?y+?z=? \\ 0+0+?z=? \end{cases}$$

- <u>La 1ª ecuación siempre se deja igual</u>, (procurando que esta sea la más sencilla).

- Suprimir la x de la segunda ecuación, trabajándola con la primera. Multiplicar por (-3) la primera y sumar la segunda=

de esta manera se elimina la x

$$\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \end{matrix}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a\ (-3) \\ 2^a \end{matrix}\begin{cases} -3x-6y+9z=48 \\ 3x+y-2z=-10 \end{cases} \xrightarrow[2^a \text{ ecuación transformada}]{1^a+2^a \text{ para obtener la}} \boxed{0x-5y+7z=38}$$

- Suprimir la x de la tercera ecuación trabajándola con la primera. Multiplicar la primera por(-2) y le sumamos la tercera.

$$\begin{matrix} 1^a \\ 3^a \end{matrix}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1^a\ (-2) \\ 2^a \end{matrix}\begin{cases} -2x-4y+6z=32 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \xrightarrow[3^a \text{ ecuación transformada}]{1^a+3^a \text{ para obtener la}} \boxed{0x-7y+7z=28}$$

- Escribir a partir de la primera ecuación las nuevas obtenidas

$$
\begin{array}{ll}
1^a & \\
2^a & \\
3^a &
\end{array}
\begin{cases}
x + 2y - 3z = -16 \\
0x - 5y + 7z = 38 \\
0x - 7y + 7z = 28
\end{cases}
$$

- Eliminar la **y** de la 3 ecuación trabajándola con la 2. Multiplicar la 2 por 7 y la 3 por(-5) esto hace que los términos en y se eliminen.

$$
\begin{array}{ll}
2^a & (7) \\
3^a & (-5)
\end{array}
\begin{cases}
-5y + 7z = 38 \\
-7y + 7z = 28
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
-35y + 49z = 266 \\
+35y - 35z = -140
\end{cases}
\rightarrow \boxed{14z = 126}
$$

- De esta manera se obtiene la ecuación escalonada

$$\begin{array}{ll} 1^a & \\ 2^a & \\ 3^a & \end{array} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 0x - 5y + 7z = 38 \\ 0x + 0y + 14z = 126 \end{cases}$$

- Calculamos z en la 3ª ecuación. $14z = 126 \Rightarrow$ $\mathbf{z = 9}$
- Sustituimos z en la 2ª y calculamos la y. $-5y + 7(9) = 38 \Rightarrow$ $\mathbf{y = 5}$
- Sustituimos z e y en la 1ª para calcular la x. $x + 2(5) - 3(9) = -16 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 1}$

- Comprobamos las soluciones.

Sustituimos los valores obtenidos en el sistema original y vemos si se cumplen las 3 ecuaciones.

Ejemplo 3 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema siguiente.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + 2y - z = 6 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución Para poner este sistema en forma triangular, se empieza por eliminar los términos en x de la segunda ecuación y de la tercera.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 & \text{Ecuación 2} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ -2y + 3z = 2 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

(Stewart,2007)

Ahora se elimina el término en y de la tercera ecuación.

Efrén Giraldo Toro

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ \quad -2y + 3z = 4 \\ \qquad\quad 0 = -2 \end{cases}$$

Efrén Giraldo Toro

Efrén Giraldo Toro

Ecuación 3 + (−1) × ecuación 2 = nueva ecuación 3

Efrén Giraldo Toro

El sistema está ahora en forma triangular, pero la tercera ecuación establece que $0 = -2$, lo cual es falso. No importa qué valores asignemos a x, y y z, la tercera ecuación nunca será verdadera. Esto quiere decir que el sistema *no tiene solución.* ■

MATRIZ 3.3
Determinante 3.3

Efrén Giraldo Toro

	Incógnitas	Coeficientes	Tindependientes	Matriz
$2x - y + z = 6$	x	2 -1 1	6	
$x + 4y - 2z = 0$	y	1 4 -2	0	
$3x - 5y + z = 4$	z	3 -5 1	4	

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 6 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - 5y + z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Efrén Giraldo Toro

http://www.vadenumeros.es/segundo/discusion-de-sistemas-rangos.htm

SISTEMAS 3.3 POR DETERMINANTES

1. Se reduce a 2.2 por el método de las líneas cruzadas

2. Se halla el determinante general del sistema de 3 ecuaciones como se explica en las diapositivas siguientes
3. Se halla Dx, Dy, Dz de la misma manera que para 2.2
4. Los valores de la x, y,z se hallan de la misma manera

Valor del determinante por el Método de las líneas cruzadas

$$\text{Determinate general} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se toma siempre la línea del primer renglón y luego se va alternando con las líneas de cada columna. Las líneas se cruzan en el vértice superior izquierdo o sea en 1. este valor se llama cofactor. Tomo ese 1 y lo multiplico por el determinante de la matriz 2.2 que queda.

$$\begin{matrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$1(-2\times1-3\times0)=-2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Hago lo mismo con la segunda columna, pero al cofactor 1 de la mitad le cambio de signo:-1(siempre al de la mitad se le cambia de signo.
- -1(1×1- 1×3) = 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tercer cofactor 1

$1(1\times0-1\times(-2))=2$

Sumo los tres resultados anteriores

$-2+2+2 = 2$ por tanto:

El valor del determinante general es 2

- El determinante Dx, Dy, Dz se calcula en forma similar a como se halló para la matriz 2×2 o sea a partir del determinante general de la matriz y reemplazando por los términos independientes en las respectivas posiciones de la x,y,z

$$\text{Determinate general} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} x + y + z = \boxed{1} \\ x - 2y + 3z = \boxed{2} \\ x + z = \boxed{5} \end{cases}$$

Determinate general $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

Determinante de la x $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21$

Determinante de la y $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8$

Determinante de la z $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$

- x = Dx / Determinante general

- y = Dy/Determinante general

- z = Dz/ Determinante general

$$x = \frac{21}{2} \qquad y = \frac{-8}{2} = -4 \qquad z = \frac{-11}{2}$$

1 Ejemplo de un sistema compatible determinado. Única solución.

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 2y + 6z = -7 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Escribimos los coeficientes de la matriz A $\overbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A}$

Resolver : utilizamos la regla de Cramer

Para calcular el valor de las incógnitas, sustituimos la columna de la incógnita que sea por los valores de la columna de los términos independientes. Las otras columnas se quedan igual. Calculamos el valor del determinante correspondiente y lo dividimos entre el valor del determinante de A.

$$x = \frac{\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline \end{array}\begin{vmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{33}{-33} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-66}{-33} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-11}{-33} = \frac{1}{3}$$

Solución : x = -1, y = 2, z = 1/3

http://www.vadenumeros.es/segundo/discusion-de-sistemas-rangos.htm

http://www.vadenumeros.es/actividades/sistemas-regla-de-cramer.htm

Bibliografía

Benítez, R. (2011). Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa Tomado el día 4 octubre de 2011 de :

http://www.google.com.co/search?sclient=psy-ab&hl=es&site=&source=hp&q=sistemas+de+ecuaciones+ppt&pbx=1&oq=sistemas+de+ecuaciones+ppt&aq=f&aqi=g1&aql=&gs_sm=s&gs_upl=188789l205205l0l207316l38l35l6l10l11l0l381l4847l0.3.13.4l35l0&biw=1262&bih=809&cad=cbv&sei=fQuLTvD0G8iitgeE1eiRAw

Hernández, E. (2011). Sistemas de Ecuaciones. Tomado el día 24 septiembre de 2011 de:

http://www.google.com.co/#hl=es&cp=26&gs_id=2g&xhr=t&q=ecuaciones+simultaneas+ppt&pf=p&sclient=psy-ab&rlz=1R2ADRA_esCO438&source=hp&pbx=1&oq=ecuaciones+simultaneas+ppt&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&fp=eb89634946306d34&biw=1280&bih=558

UPC. (2011). Sistema de ecuaciones lineales. Tomado el 4 octubre de 2011 de:

http://www.google.com.co/#hl=es&cp=24&gs_id=7&xhr=t&q=ecuaciones+3+incognitas++gauss+ppt&pq=ecuaciones+3+incognitas+por+gauss+ppt&pf=p&sclient=psy-ab&source=hp&pbx=1&oq=ecuaciones+3+incognitas++gauss+ppt&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=cf.osb&fp=37c59e260aff557d&biw=1280&bih=598&bs=1

http://www.vitutor.com/algebra/sistemas%20I/cramer.html.

http://www.vadenumeros.es/actividades/sistemas-regla-de-cramer.htm Dirección Programa

Stewart 2007. Precálculo