Capítulo 8

Trigonometría

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

8.1 Introducción

La palabra "Trigonometría" procede del griego y su significado es "medida de triángulos". Así, se considera la trigonometría como aquella parte de la matemática que trata de los elementos de los triángulos, tanto planos como esféricos.

No obstante a pesar del concepto de trigonometría que se acaba de ofrecer, hoy en día la trigonometría posee otras muchas importantes aplicaciones que no se refieren específicamente a los triángulos.

Muchos fenómenos físicos se representan de un modo regular o periódico, por ejemplo, el movimiento de un péndulo oscila de modo regular; el voltaje de un circuito de corriente alterna oscila constantemente entre los valores positivos y negativos; incluso las estaciones del año tienen un ciclo perfectamente definido.

Por lo anterior, se dice que estos fenómenos tienen cambios periódicos.

Para el estudio de estos cambios periódicos, se usan modelos matemáticos, en los cuales las funciones trigonométricas son fundamentales.

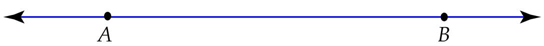
Para iniciar el desarrollo de este capítulo, recordaremos algunos conceptos fundamentales de geometría plana.

8.2 Algunos conocimientos previos de geometría plana

■ **Definición 1**

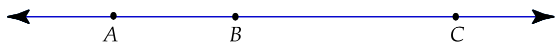
Sea L una recta de ecuación $y = mx + b$, con $m \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Si A y B son puntos de L, entonces escribimos $L = \overleftrightarrow{AB}$

La recta L la podemos representar geométricamente sin usar coordenadas rectangulares de la siguiente forma:



Definición 2

Rayo. Sea L una recta de ecuación $y = mx + b$, con $m \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y sean A, B y C tres puntos en L como se muestra en la siguiente figura:



Sea $B = (x_0, y_0)$. Los conjuntos definidos por:

a.) $\overrightarrow{BA} = \{(x, y) \in \text{L}/\ x \leq x_0\}$

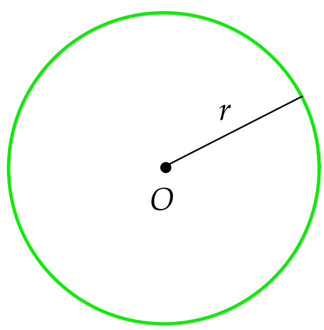
b.) $\overrightarrow{BC} = \{(x, y) \in \text{L}/\ x \geq x_0\}$

reciben el nombre de *rayos* y el punto B recibe el nombre de *origen* o punto inicial del rayo.

De acuerdo con la figura anterior, los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ se pueden representar respectivamente así:

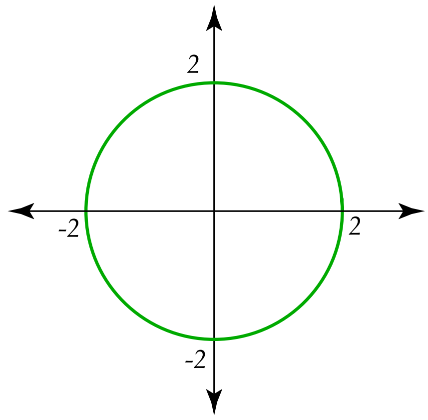
Definición 3

Círculo. Sea P un plano, O un punto en P y $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$.
Se llama círculo de centro O y de radio r, al conjunto de puntos en P cuya distancia a O es r.

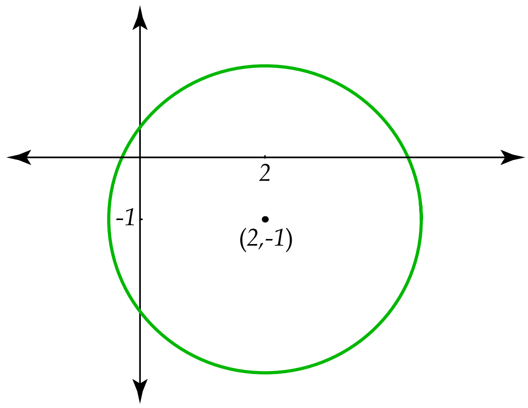


Ejemplo 1

a) Sea C un círculo cuyo radio es $2cm$ y su centro es el punto $(0, 0)$, entonces C se puede representar así:



b) Sea C un círculo cuyo radio es $2,5cm$ y su centro es $(2,-1)$ entonces C se puede representar así:



Ejercicios 1

Represente cada uno de los siguientes círculos:

1. C es un círculo de radio $3,5cm$ y su centro es $(-2,-1)$

2. C es un círculo de radio $4cm$ y su centro es $(0,2)$

3. C es un círculo de radio $2,25cm$ y su centro es $(-3,2)$

■ **Definición 4**

Circunferencia. Sea C un círculo, se llama circunferencia de C a la longitud del círculo C.

Si C es un círculo de radio r, entonces la circunferencia L de C es dada por:

$$L = 2\pi r$$

Ejemplo 2

1. Sea C un círculo cuyo radio es $5cm$ entonces la circunferencia L de C es dada por:

$$L = 2\pi \cdot 5 \implies L = 10\pi$$

Así la circunferencia de C es $10\pi\ \ cm$.

2. Sea C un círculo cuyo radio es $7,5\ \ cm$ entonces la circunferencia L de C es dada por:

$$L = 2\pi \cdot 7.5 \implies L = 15\pi$$

Así la circunferencia de C es $15\pi\ \ cm$.

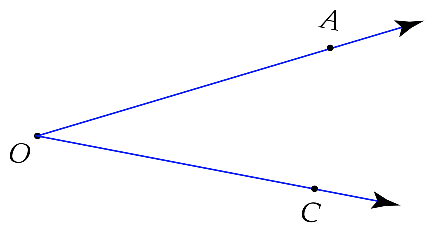
Ejercicios 2

Calcule la circunferencia de cada uno de los siguientes círculos:

1. C es un círculo cuyo radio es $12\ cm$.
2. C es un círculo cuyo radio es $1\ cm$.
3. C es un círculo cuyo radio es $13,5$ pulgadas.

Definición 5

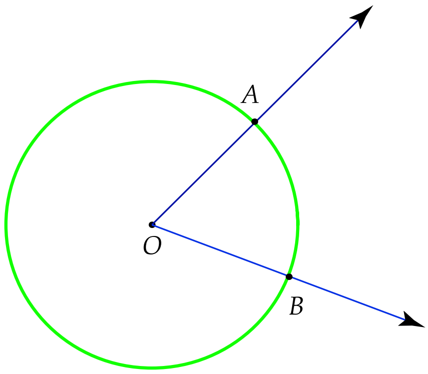
Ángulo plano. Se llama ángulo plano a la unión de dos rayos con un origen común. Los rayos que forman un ángulo se llaman lados del ángulo y al punto común u origen de los rayos, se llama vértice del ángulo.



En la figura anterior los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un ángulo y se denota $\measuredangle AOC$ ($\measuredangle AOC$ se lee "ángulo AOC")

Definición 6

Ángulo central. Se llama ángulo central de un círculo a aquel ángulo cuyo vértice es el centro del círculo.

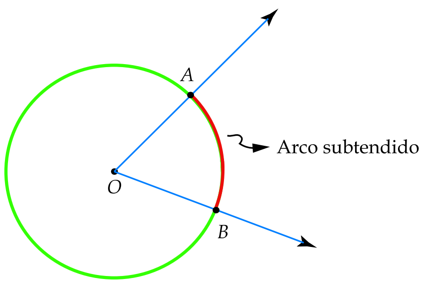


El $\measuredangle AOB$ es un ángulo central.

Definición 7

Arco subtendido. Sea un círculo de centro O y radio r, sea el $\measuredangle\ POQ$ un ángulo central de C, tal que P y Q están en C.

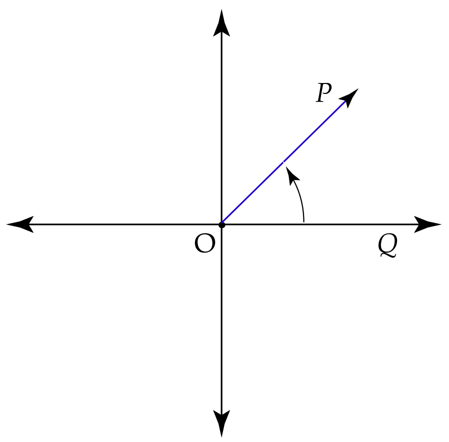
Se llama arco subtendido por el ángulo POQ al conjunto de puntos de C que están entre P y Q, incluyendo a estos.



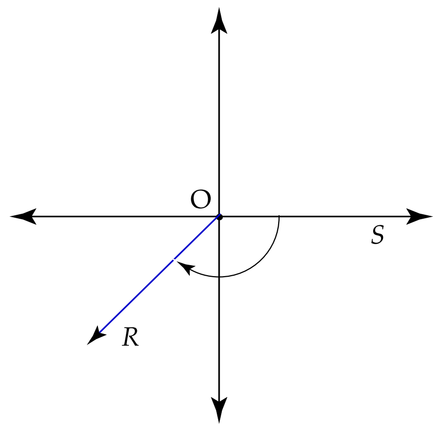
A veces resulta conveniente designar a uno de los lados de un ángulo como el lado inicial del ángulo y al otro como lado final.

En un sistema de coordenadas rectangulares los ángulos que tienen su vértice en el origen del sistema de coordenadas y el rayo positivo del eje X como lado inicial, se dice que están en posición normal

Ejemplo 3



El $\measuredangle\ POQ$ está en posición normal, su lado inicial es $\overrightarrow{OQ}$ y su lado final es $\overrightarrow{OP}$.



Ejercicio: Complete la frase siguiente: si $\measuredangle\ ROS$ está en posición normal, entonces su lado inicial es __________ y su lado final es __________

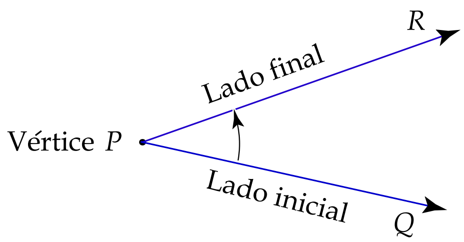
Rotación positiva y rotación negativa

Un ángulo puede considerarse engendrado por dos rayos con un origen común de la siguiente manera, un rayo fijo (lado inicial) y un rayo móvil (lado final) que rota alrededor de su origen.

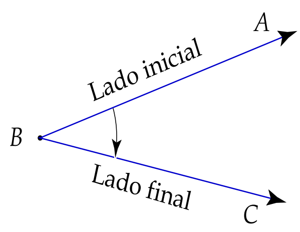
Definición 8

Dado un ángulo que se considere engendrado por una rotación, si ésta se ha realizado en el sentido contrario al que giran las agujas del reloj, se dice que el ángulo tiene sentido positivo, en caso contrario, se dice que el ángulo tiene sentido negativo.

Ejemplo 4



El $\measuredangle RPQ$ tiene sentido positivo



El $\measuredangle ABC$ tiene sentido negativo

Ejercicios 3

Dibuje dos ángulos, uno con sentido positivo y otro con sentido negativo.

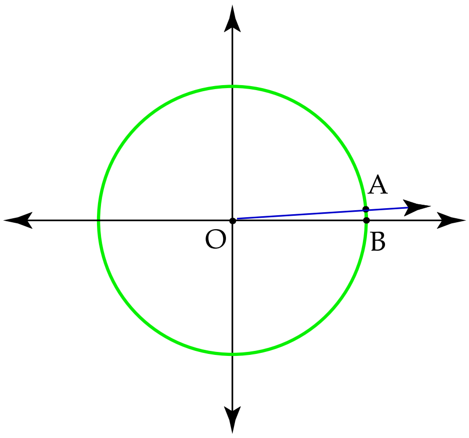
8.3 Medida de ángulos

Para medir ángulos existen dos sistemas de medición uno que usa como unidad de medida el grado, y otro que usa como unidad de medida el radián.

8.3.1 Medida en grados

Consideremos el $\measuredangle ABC$ como ángulo central de un círculo y con sentido positivo.

Se dice que la medida del $\measuredangle ABC$ es un grado (1°) si subtiende un arco cuya medida es $\dfrac{1}{360}$ de la circunferencia.



Notación: m $\measuredangle ABC = 1^\circ$;   m $\measuredangle ABC$ se lee "medida del ángulo ABC"

Definición 9

a) Un minuto, denotado por $1'$, es $\dfrac{1}{60}$ parte del grado.

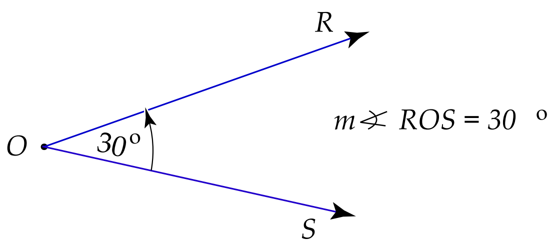
b) Un segundo, denotado por $1''$, es $\dfrac{1}{60}$ parte de un minuto.

Por consiguiente: 1 hora $= 60'$ y 1 minuto $= 60''$.

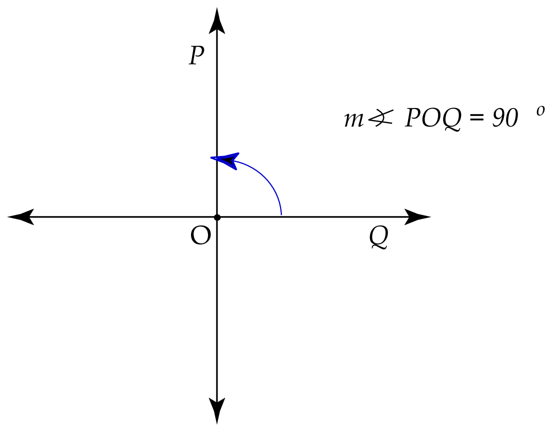
Representación de ángulos

Ejemplo 5

a. Representación de un ángulo cuya medida es 30°.



b. Representación de un ángulo de 90° en posición normal.



Nota: Un ángulo cuya medida es 90° recibe el nombre de **ángulo recto**

Ejercicios 4

1. Represente de manera aproximada (usando regla y transportador) un ángulo cuya medida sea:

   (i) 60°

   (ii) 150°

   (iii) 180°

   (iv) 360°

2. Represente (usando regla y transportador) un ángulo en posición normal y cuya medida sea:

   (i) 135°

   (ii) 315°

   (iii) 15°

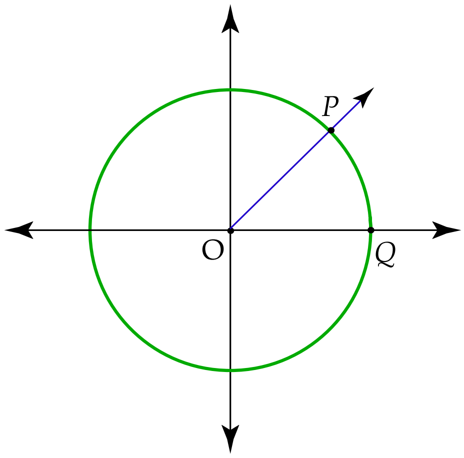
   (iv) 120°

8.3.2 Medida en radianes

Para definir lo que entenderemos por radián asumiremos que los arcos del círculo se pueden medir, recordemos también que los círculos de radio 1 tienen como circunferencia 2π, observaremos además que también aceptamos la existencia de un número real.

Definición 10

Sea C un círculo de radio 1 y centro en el origen del sistema de coordenadas rectangulares



Diremos que el valor absoluto de la medida del $\measuredangle POQ$, en radianes, es igual a la longitud del arco PQ

Ejemplo 6

Sea C un círculo de centro O y radio 1

a) Si el ángulo MON subtiende al arco de longitud $\dfrac{\pi}{4}$, entonces la medida en radianes del ángulo MON es $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

b) Si el ángulo ROS subtiende un arco de longitud 2π, entonces la medida en radianes del ángulo ROS es __________

c) Si el ángulo JOX subtiende un arco de longitud 1, entonces la medida en radianes del ángulo JOX es 1 radián.

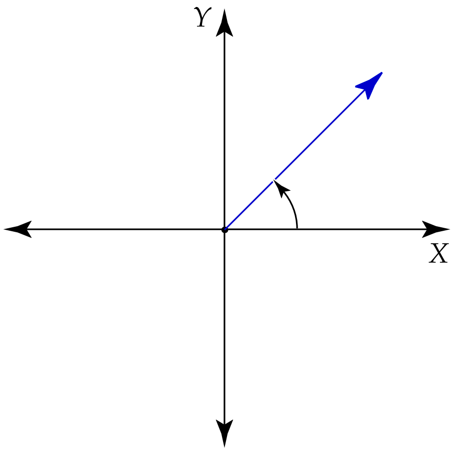
Nota:

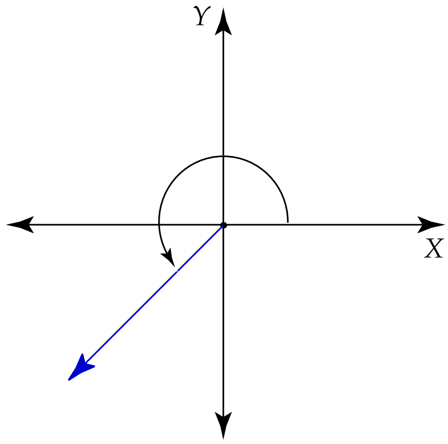
1. Si un ángulo ha sido engendrado por rotación positiva, entonces se le asigna una medida positiva.

2. Si un ángulo ha sido engendrado por rotación negativa, entonces se le asigna una medida negativa.

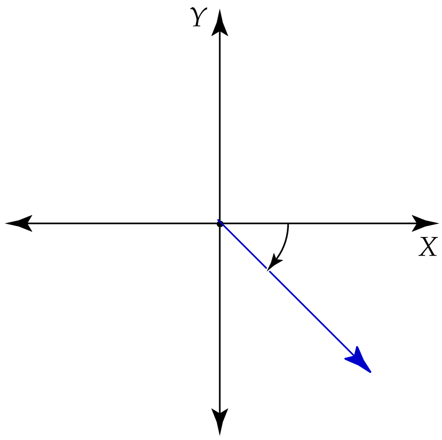
Ejemplo 7

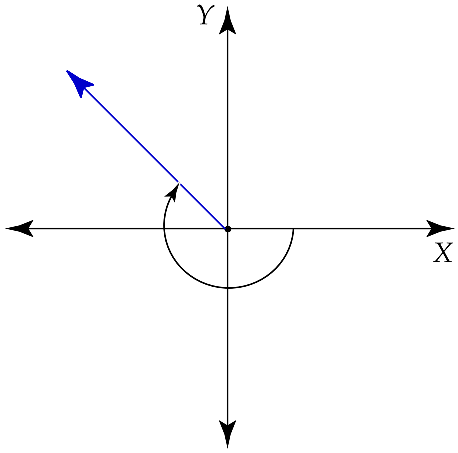
1. Los ángulos que se presentan a continuación tienen medida positiva.





2. Los ángulos que se representan a continuación tienen medida negativa.





Por lo anterior existen ángulos cuya medida es $35°$, $-35°$, $700°$, 3 radianes, $\dfrac{-3}{4}$ radianes, etc.

Convenio

Siempre que no se especifique las unidades para la medida de un ángulo entenderemos que las unidades son radianes.

Ejemplo 8

1. $m\measuredangle ABC = 2\pi$ significa que "la medida del $\measuredangle ABC$ es 2 radianes"

2. $m\measuredangle POQ = \dfrac{-3\pi}{2}$ significa que "la medida del $\measuredangle POQ = \dfrac{-3\pi}{2}$ radianes".

8.3.3 Relación entre grados y radianes

Como la circunferencia de un círculo de radio 1 es igual a 2π, se tiene que un rayo engendra un ángulo cuya medida es 2π radianes cuando el rayo se hace rotar "una vuelta completa", en sentido positivo.

De la misma forma, dado que un ángulo cuya medida es 1°, subtiende un arco cuya medida es $\dfrac{1}{360}$ de la circunferencia, se tiene que un rayo engendra un ángulo cuya medida es 360°, cuando el rayo se hace rotar "una vuelta completa" en sentido positivo.

Ejemplo 9

a.) Un ángulo de 360° es equivalente a un ángulo de 2π radianes.

b.) Un ángulo de 180° es equivalente a un ángulo de π radianes.

c.) Un ángulo de 90° es equivalente a un ángulo de $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

d.) Un ángulo de 45° es equivalente a un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

En particular se tiene que:

1. La medida R en radianes de un ángulo que mide G grados (G°) es el número real R por:

$$R = \frac{\pi G}{180}$$

2. La medida G en grados (G°) de un ángulo que mide R radianes, viene dada por:

$$G = \frac{180^\circ R}{\pi}$$

Ejemplo 10

Exprese en radianes las siguientes medidas de ángulos

a.) 210°

b.) -36°

c.) -720°

d.) 315°

Solución

a.) $R = \dfrac{\pi \cdot 210}{180} \Longrightarrow R = \dfrac{7\pi}{6}$, o sea 210° equivale a $\dfrac{7\pi}{6}$

b.) $R = \dfrac{\pi \cdot (-36)}{180} \Longrightarrow R = \dfrac{-\pi}{5}$, o sea $\quad -36^\circ$ equivale a $\dfrac{-\pi}{5}$

c.) $R = \dfrac{\pi \cdot (-720)}{180} \Longrightarrow R = -4\pi$, o sea $\quad -720^\circ$ equivale a -4π

d.) $R = \dfrac{\pi \cdot 315}{180} \Longrightarrow R = \dfrac{7\pi}{4}$, o sea $\quad 315^\circ$ equivale a $\dfrac{7\pi}{4}$

Ejemplo 11

Exprese en grados las siguientes medidas de ángulos, dadas en radianes.

(a.) $\dfrac{5\pi}{3}$

(b.) $\dfrac{-11\pi}{4}$

(c.) $\dfrac{-5\pi}{6}$

(d.) 3

Solución

(a.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \frac{5\pi}{3}}{\pi} \Longrightarrow G^\circ = 300^\circ$, o sea $\dfrac{5\pi}{3}$ equivale a 300°

(b.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \frac{-11\pi}{4}}{\pi} \Longrightarrow G^\circ = -495^\circ$, o sea $\dfrac{-11\pi}{4}$ equivale a -495°

(c.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \frac{-5\pi}{6}}{\pi} \Longrightarrow G^\circ = -150^\circ$, o sea $\dfrac{-5\pi}{6}$ equivale a -150°

(d.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot 3}{\pi} \Longrightarrow G^\circ \approx 171.88734^\circ \approx 171^\circ 53' 14''$, o sea 3 equivale a $171^\circ 53' 14''$ aproximadamente

Nota: para pasar 0.88734° a minutos y segundos usamos *regla de tres*. En este caso $0.88734 = 53.2404' = 53' + 0.2404' = 53' + 14.424''$

Ejercicios 5

i. Exprese en radianes las siguientes medidas de ángulos:

1.) $30°$

2.) $90°$

3.) $150°$

4.) $-300°$

5.) $45°$

6.) $120°$

7.) $-180°$

8.) $-330°$

9.) $60°$

10.) $-135°$

11.) $270°$

12.) $360°$

ii. Exprese en grados las siguientes medidas de ángulos dados en radianes:

1.) $\frac{5\pi}{3}$

2.) $\frac{-7\pi}{6}$

3.) $\frac{-3\pi}{2}$

4.) $\frac{5\pi}{4}$

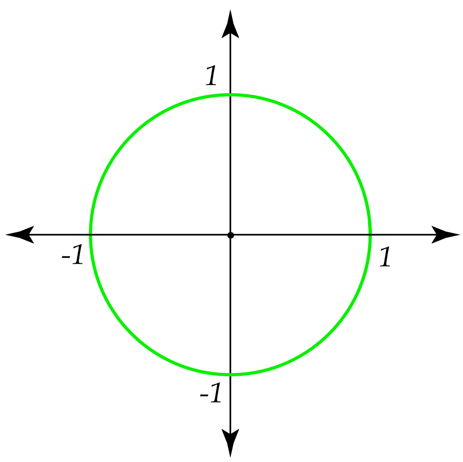
5.) $\frac{3}{2}$

6.) $\frac{-1}{2}$

8.3.4 Círculo trigonométrico

Definición 11

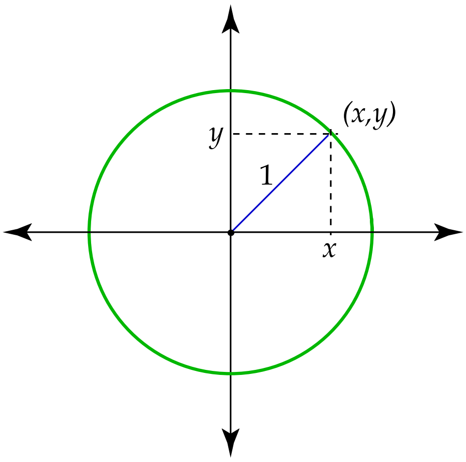
El círculo cuyo radio es 1 y su centro es el punto $(0,0)$ de un sistema de coordenadas rectangulares, se llama círculo trigonométrico.



En la figura anterior observe que si (x, y) es un punto del círculo trigonométrico entonces:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Verifíquelo!



Ejercicios 6

Con respecto a la figura anterior:

Si (x, y) es un punto del círculo trigonométrico determine:

1. ¿Cuáles son los valores posibles para x?

2. ¿Cuáles son los valores posibles para y?

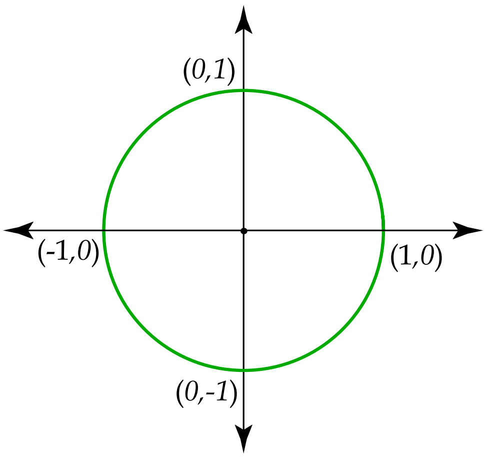
3. ¿En qué cuadrante x es positiva?

4. ¿En qué cuadrante x es negativa?

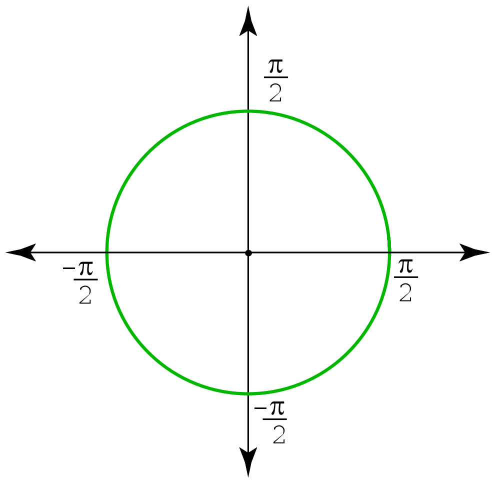
5. ¿En que cuadrante y es positiva?

6. ¿En qué cuadrante y es negativa?

En la siguiente figura, se muestra los puntos de intersección entre el círculo trigonométrico y los ejes coordenados.



En la siguiente figura, se muestra las medidas de los ángulos (en sentido positivo) en posición normal, que se forman con los ejes coordenados.



8.4 Las funciones trigonométricas seno y coseno

Definición 12

Sea P un punto en el círculo trigonométrico, tal que $P=(x,y)$, sea α la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP (ver figura)

Se definen las funciones:

a)

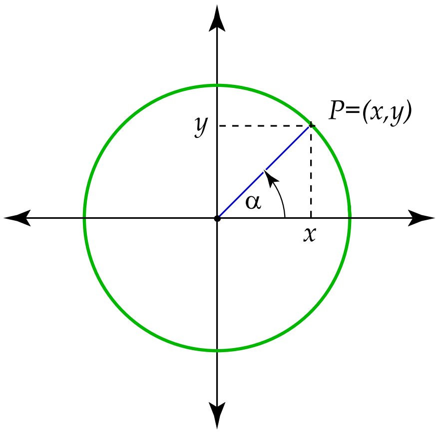
$$\begin{array}{rccl} \text{coseno}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & x, \quad \text{o sea, coseno}(\alpha)=x \end{array}$$

Nota: Designamos con $\cos\alpha$ el criterio de la función coseno; o sea $\cos\,(\alpha)=$ coseno (α)

b)

$$\begin{array}{rccl} \text{seno}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & y, \quad \text{o sea, seno}(\alpha)=y \end{array}$$

Nota: Designamos con $\text{sen}\,\alpha$ el criterio de la función seno; o sea, $\text{sen}\,(\alpha)=$ seno (α)



Por lo anterior se obtiene que $x = \cos\,(\alpha)$; $y = \text{sen}\,(\alpha)$ o sea, $P = (x, y) = (\cos\,(\alpha), \text{sen}\,(\alpha))$

Algunas propiedades de las funciones seno y coseno

a.) <u>**Ámbito de las funciones seno y coseno**</u>

Como el punto P pertenece al círculo trigonométrico, se obtiene que las coordenadas "x" y "y" de P satisfacen respectivamente las desigualdades compuestas.

i.) $-1 \leq x \leq 1$

ii.) $-1 \leq y \leq 1$

Además como $\cos\,(\alpha) = x$ y $\text{sen}\,\alpha = y$ entonces:

i.) $-1 \leq \cos\,(\alpha) \leq 1$

ii.) $-1 \leq \text{sen}\,(\alpha) \leq 1$

Por lo que el ámbito de las funciones seno y coseno es $[-1, 1]$.

b.) <u>**Signo de los valores de las funciones seno y coseno**</u>

Con base en el ejercicio 6 y la definición de las funciones seno y coseno se obtiene que:

i.) Si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ entonces $\cos\,(\alpha)$ y $\text{sen}\,(\alpha)$ son números reales positivos.

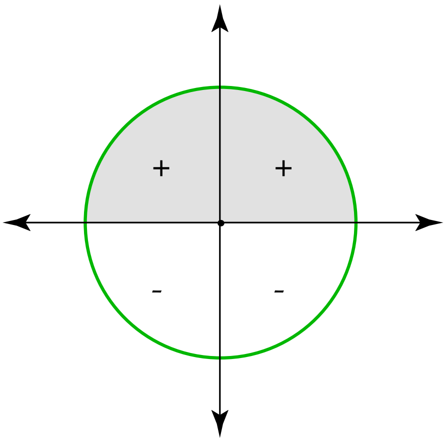
ii.) Si $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ entonces $\cos\,(\alpha)$ es un número real negativo y $\text{sen}\,(\alpha)$ es un número real positivo.

iii.) Si $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ entonces $\cos\,(\alpha)$ y $\text{sen}\,(\alpha)$ son números reales negativos.

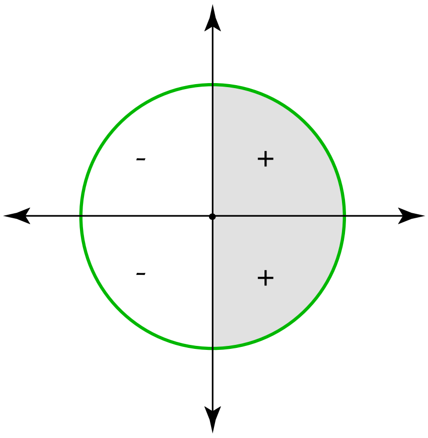
iv.) Si $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ entonces $\cos\,(\alpha)$ es un número real positivo y $\text{sen}\,(\alpha)$ es un número real negativo.

Las propiedades anteriores pueden resumirse de la siguiente forma:

a. La función seno toma valores positivos en el I y II cuadrante y valores negativos en el III y IV cuadrante.

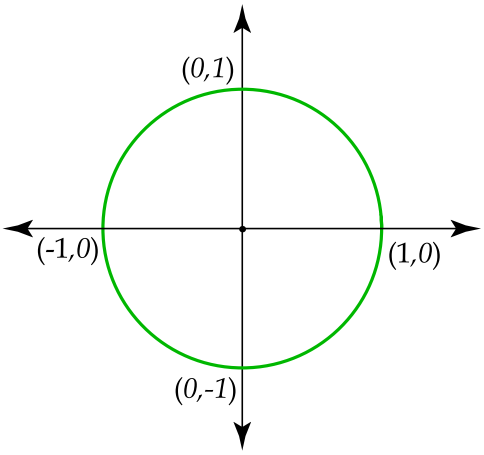


b. La función coseno toma valores positivos en el I y IV cuadrante y valores negativos en el II y III cuadrante.



c. **Algunos valores de las funciones seno y coseno**

Como los puntos de intersección del círculo trigonométrico con los ejes coordenados son $(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ como se muestra en la figura siguiente:



Tenemos que:

i) $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$

ii) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1$ y $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$

iii) $\operatorname{sen} \pi = 0$ y $\cos \pi = -1$

iv) $\operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2} = -1$ y $\cos \dfrac{3\pi}{2} = 0$

Ejercicios 7

Para cada uno de los siguientes ángulos:

a.) $\alpha = \dfrac{-3\pi}{2}$

b.) $\alpha = \dfrac{-\pi}{2}$

c.) $\alpha = 2\pi$

d.) $\alpha = 7\pi$

e.) $\alpha = \dfrac{-5\pi}{2}$

f.) $\alpha = 27\pi$

i.) Represente en el círculo trigonométrico, el ángulo correspondiente.

ii.) Para cada valor de α, calcule cos (α) y sen (α).

d.) **Periodicidad de las funciones seno y coseno**

Sea $P = (x, y)$ un punto en el círculo trigonométrico. Sea α la medida del ángulo, cuyo lado inicial es el lado positivo del eje X y cuyo lado final es el rayo OP. Si hacemos girar el rayo OP "una vuelta completa", o en forma general "n vueltas completas", entonces el rayo OP en su posición final interseca al círculo trigonométrico en el mismo punto (x, y), por lo cual los valores de las funciones seno y coseno no han variado, así tenemos que:

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen} \alpha$$

En general:

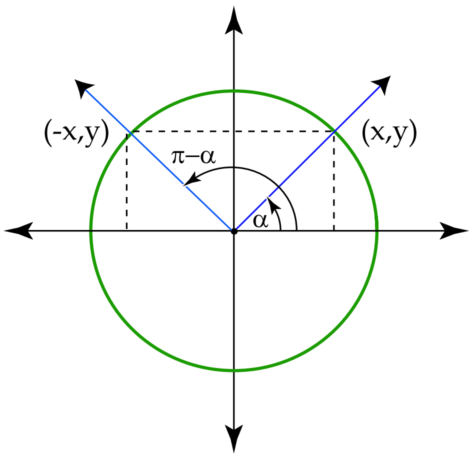
$$\cos(\alpha + n \cdot 2\pi) = \cos \alpha \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\alpha + n \cdot 2\pi) = \operatorname{sen} \alpha$$

Por lo anterior se dice que las funciones seno y coseno son funciones periódicas y su período es 2π.

e.) Sea $P = (x, y)$ un punto del círculo trigonométrico, sea α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP entonces:

i.) $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Justificación



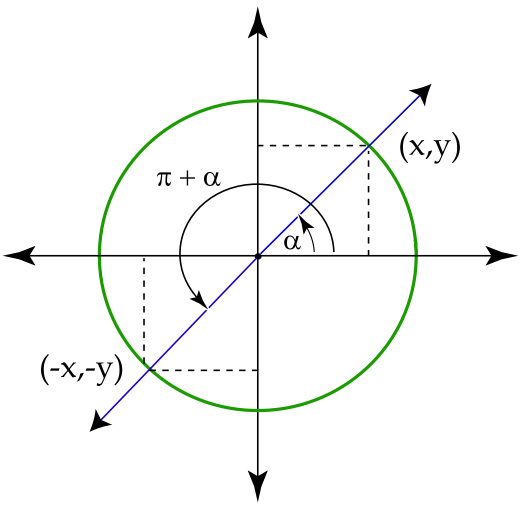
De la figura se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(\alpha) & = & y \\ \operatorname{sen}(\pi-\alpha) & = & y \end{array}\right\} \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(\alpha) & = & x \\ \cos(\pi-\alpha) & = & -x \end{array}\right\} \cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$$

ii) $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

Justificación



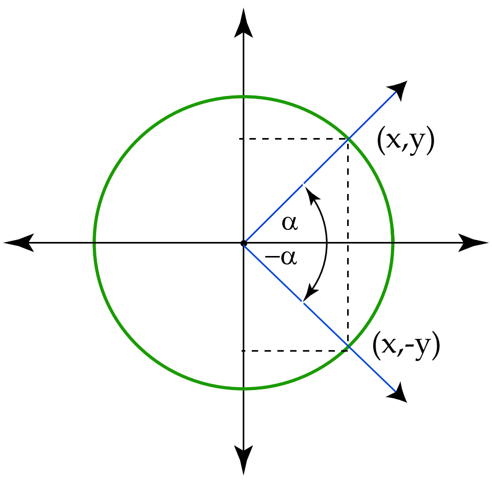
De la figura se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen }(\alpha) & = & y \\ \text{sen}(\pi+\alpha) & = & -y \end{array}\right\} \text{ sen}(\pi+\alpha) = -\text{ sen }(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(\alpha) & = & x \\ \cos(\pi+\alpha) & = & -x \end{array}\right\} \cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$$

iii) $\text{sen}(-\alpha) = -\text{ sen}\,\alpha$ y $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Justificación



De la figura se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen }(\alpha) & = & y \\ \text{sen}(-\alpha) & = & -y \end{array}\right\} \text{ sen}(-\alpha) = -\text{ sen }(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(\alpha) & = & x \\ \cos(-\alpha) & = & x \end{array}\right\} \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

f. Sea P un punto del círculo trigonométrico tal que $P = (x, y)$.

Sea α la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP, entonces las coordenadas de P satisfacen la igualdad $x^2 + y^2 = 1$.

Como $x = \cos\alpha$ y $y = \text{sen }(\alpha)$ entonces:

$$(\cos(\alpha))^2 + (\operatorname{sen}(\alpha))^2 = 1 \qquad (I)$$

Notación $(\cos(\alpha))^n = \cos^n \alpha$ y $(\operatorname{sen}(\alpha))^n = \operatorname{sen}^n \alpha$

Así la igualdad (I) se escribe:

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

Observación importante: La periodicidad de las funciones seno y coseno (así como las propiedades enunciadas en puntos $e.i$ y $e.ii$, nos permiten generalizar la propiedad enunciada en el punto $e.iii$

O sea: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$$

Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cuya medida es α, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

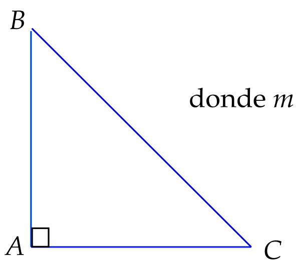
Recuerde que:

a) Un ángulo cuya medida es α, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ recibe el nombre de ángulo agudo.

b) Un ángulo cuya medida es α, donde $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ recibe el nombre de ángulo obtuso.

c) La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es π.

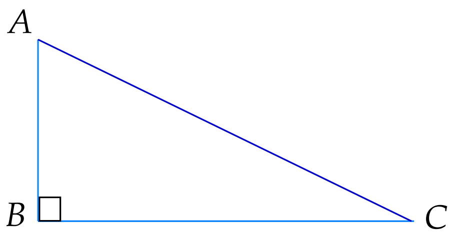
d) Un triángulo en el cual uno de sus ángulos internos es un ángulo recto recibe el nombre de triángulo rectángulo y se representa:



donde $m \measuredangle BAC = \frac{\pi}{2}$

e) Sea l una recta y sean A y B puntos de l, se llama segmento de extremos A y B al conjunto de puntos de l que están entre A y B incluyendo a éstos; se denota $\overline{AB}$ y se representa:

f) Sea ΔABC tal que $m\measuredangle ABC = \frac{\pi}{2}$



entonces:

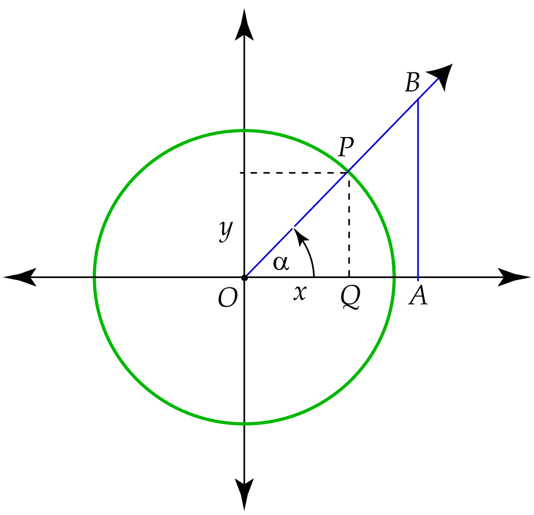
i) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ reciben el nombre de <u>catetos</u> del $\triangle ABC$.

ii) $\overline{AC}$ recibe el nombre de <u>hipotenusa</u> del $\triangle ABC$.

Las funciones seno y coseno, como razón entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Sea P un punto del círculo trigonométrico tal que $P = (x, y)$. Sea α la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP.

Sea A un punto en la parte positiva del eje x tal que $d(O, A) > 1$ y sea B un punto de $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{BA} \perp \overline{OA}$, como se muestra en la figura.



Por semejanza de triángulos tenemos que el $\triangle OQP$ es semejante al $\triangle OAB$ de donde:

i) $\dfrac{d(Q,P)}{d(O,P)} = \dfrac{d(A,B)}{d(O,B)}$

como $d(Q,P) = \text{sen }(\alpha)$, y $d(O,P) = 1$

entonces:

$$\frac{\text{sen }(\alpha)}{1} = \frac{d(A,B)}{d(O,B)}$$

Por lo tanto:

$$\text{sen }(\alpha) = \frac{d(A,B)}{d(O,B)}$$

ii) $\dfrac{d(O,Q)}{d(O,P)} = \dfrac{d(O,A)}{d(O,B)}$

como $d(O,Q) = \cos\,(\alpha)$, y $d(O,P) = 1$

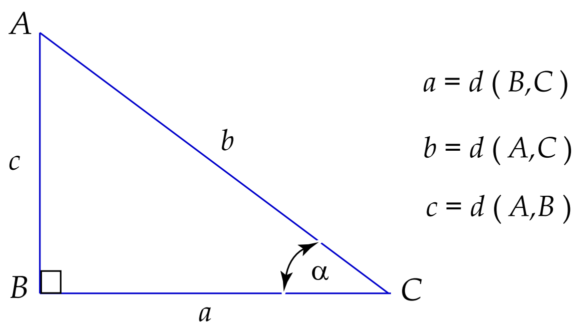
entonces:

$$\frac{\cos\,(\alpha)}{1} = \frac{d(O,A)}{d(O,B)}$$

Por lo tanto:

$$\cos\,(\alpha) = \frac{d(O,A)}{d(O,B)}$$

en general se tiene que si el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo y α es la medida de uno de sus ángulos internos agudos, como se muestra en la figura.



entonces:

$$\text{sen}\,(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo cuya medida es } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

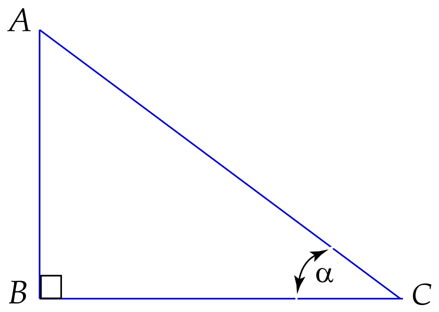
$$\cos\,(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo cuya medida es } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

Por lo tanto de acuerdo a la figura:

$$\text{sen}\,(\alpha) = \frac{c}{b} \quad \text{y} \quad \cos\,(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 12

Considere el triángulo rectángulo representado en la siguiente figura:



$$\begin{aligned} \text{donde } d(A,B) &= 4 \\ d(B,C) &= 3 \end{aligned}$$

Determine sen α y $\cos\alpha$

Solución

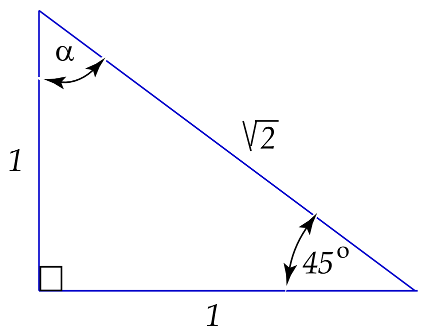
$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha) &= \frac{d(A,B)}{d(A,C)} \quad \text{y} \quad \cos\,(\alpha) = \frac{d(B,C)}{d(A,C)} \\ \text{sen}\,(\alpha) &= \frac{4}{d(A,C)} \quad \text{y} \quad \cos\,(\alpha) = \frac{3}{d(A,C)} \end{aligned}$$

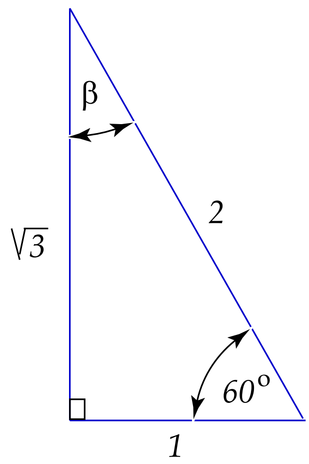
Sea $d(A,C) = a,$ por el Teorema de Pitágoras $a^2 = 3^2 + 4^2 \Longrightarrow a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$

Por lo tanto sen $\alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

Ejercicios 8

Considere las siguientes figuras:





determine:

a) α

b) $\operatorname{sen} 45^\circ$ y $\cos 45^\circ$

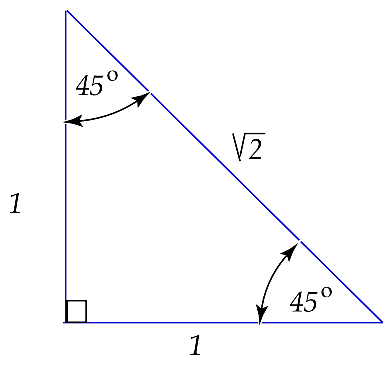
c) $\operatorname{sen} 60^\circ$ y $\cos 60^\circ$

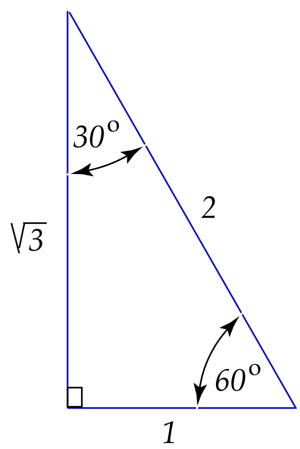
d) β

e) $\operatorname{sen}(\beta)$ y $\cos(\beta)$

Valores de las funciones seno y coseno, para ángulos cuya medida es $45^\circ,\ 60^\circ$ **ó** 30°

De particular importancia son los valores de las funciones seno y coseno para ángulos cuya medida sea $45^\circ,\ 30^\circ$ y 60° y dado que estas funciones para un ángulo agudo, pueden expresarse como razones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, recordemos los valores de las funciones seno y coseno para $45^\circ,\ 30^\circ$ y 60°, mediante las siguientes figuras:





Obtenemos así la siguiente tabla:

x	$60°$	$45°$	$30°$
$\operatorname{sen} x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nota: Recuerde que:

$60°$ es equivalente a $\frac{\pi}{3}$

$30°$ es equivalente a $\frac{\pi}{6}$

$45°$ es equivalente a $\frac{\pi}{4}$

■ Ejemplo 13

Calcular:

a.) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

b.) $\operatorname{sen}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$

c.) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Solución

a.) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

Como $\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \left(2\pi + \frac{-\pi}{3}\right)$

entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{-\pi}{3}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right) && \text{por propiedad d} \\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) && \text{por propiedad e-iii} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

b.) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{-7\pi}{6}\right)$

Sabemos que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{-7\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

Como $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$

entonces:

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= -\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{por propiedad e-ii} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

c.) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

como $\dfrac{7\pi}{4} = 2\pi + \dfrac{-\pi}{4}$

entonces:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \cos\left(2\pi + \frac{-\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{por propiedad d} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{por propiedad e-ii} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

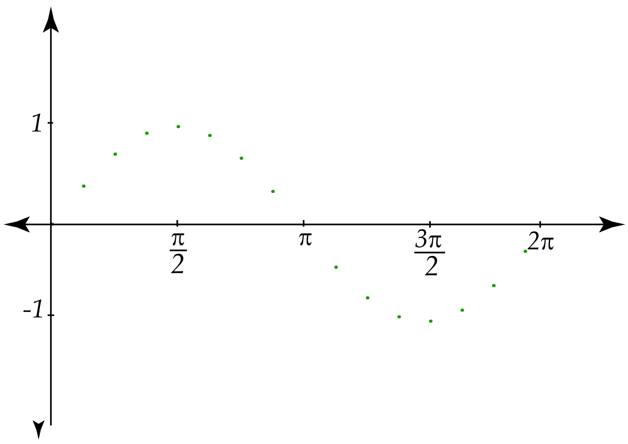
8.4.1 Representación del gráfico de las funciones seno y coseno

1. **Representación del gráfico de la función seno.**

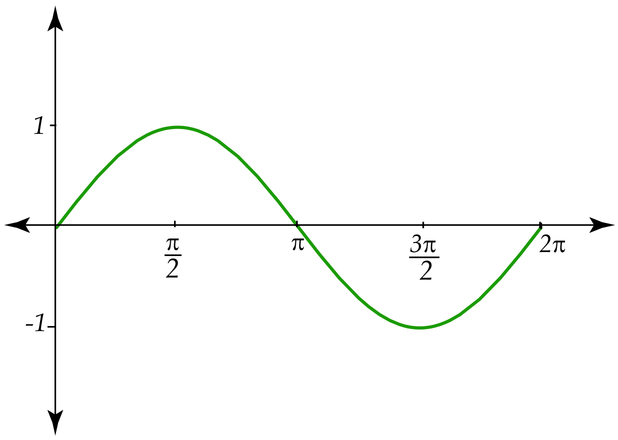
Recordemos que seno: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, así para analizar el trazo de la función seno construiremos la siguiente tabla de valores convenientes:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = senx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0

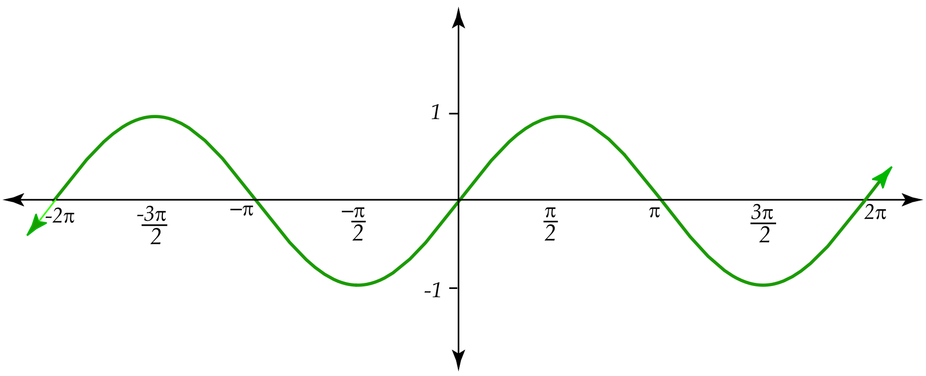
Al representar cada uno de los puntos en un sistema de coordenadas tenemos:



por lo tanto representando los pares $(\alpha,\ \text{sen}\ (\alpha))$ para todo α, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Se obtendrá el trazo de la función seno correspondiente a ese intervalo, como se muestra en la figura



Dado que la función seno es una función periódica, de período 2π o sea $\text{sen}(\alpha + 2n\pi) = \text{sen}\,\alpha$, el trazo correspondiente a la función seno en el intervalo $[0, 2\pi]$ se repite cada 2π, obteniéndose así:

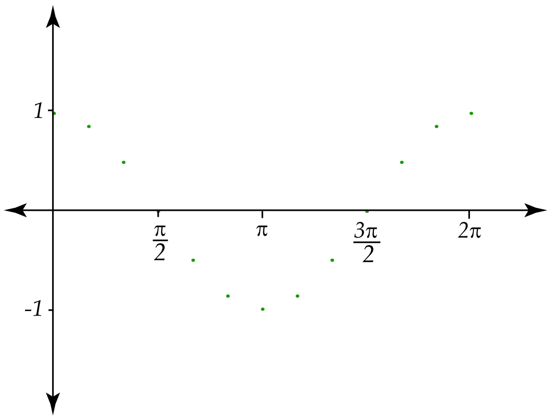


2. **Representación del gráfico de la función coseno.**

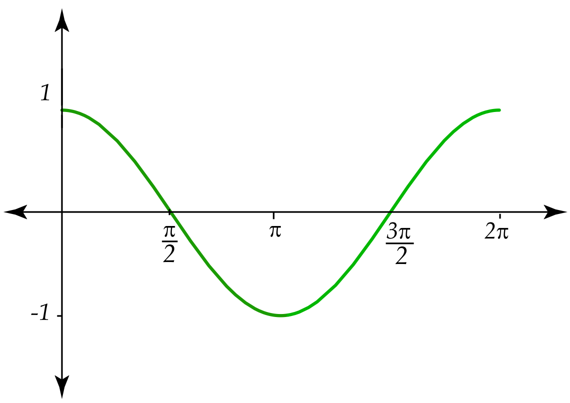
Recordemos que coseno: $\mathbb{R} \to [-1,1]$, así para realizar el trazo de la función coseno construiremos la siguiente tabla de valores convenientes:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

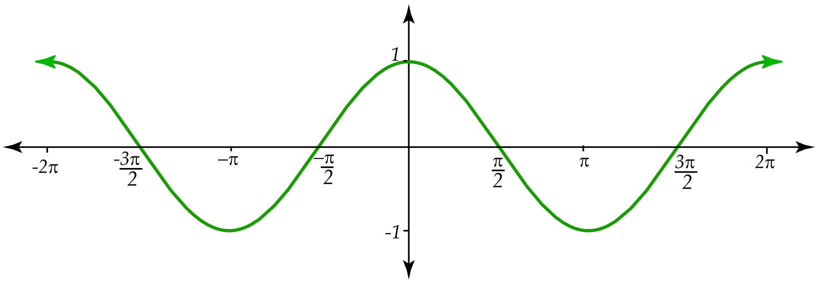
Al representar cada uno de los puntos en un sistema de coordenadas obtenemos:



por lo tanto representando los pares $(\alpha,\ cos\alpha)$ para todo α, $\alpha \in [0, 2\pi]$ se obtendrá el trazo de la función coseno correspondiente a ese intervalo, como se muestra en la figura



Como la función coseno es una función periódica, de período 2π (o sea $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$), el trazo correspondiente a la función coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$ se repite cada 2π, obteniéndose así:



Ejemplo 14

Hacer el trazo de la función f, definida por $f(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución

Para construir la tabla de valores, es conveniente que $\alpha - \dfrac{\pi}{3}$ tome los valores 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, 2π, así obtenemos la siguiente tabla.

$\alpha - \dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen}\left[\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right]$	0	1	0	-1	0

Como para realizar el trazo de f, necesitamos pares $\left(\alpha, \operatorname{sen}\left[\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right]\right)$ entonces los valores de α se obtienen así:

a.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

b.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

c.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = \pi \Longrightarrow \alpha = \pi + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{4\pi}{3}$

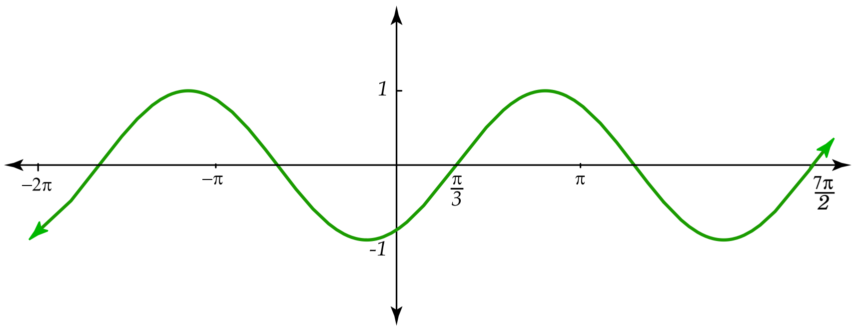
d.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{2} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{11\pi}{6}$

e.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi \Longrightarrow \alpha = 2\pi + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{7\pi}{3}$

Con la tabla y la información anterior, construimos la siguiente tabla

α	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	(*)
$\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0	(**)

Usando $(*)$, $(**)$ y la periodicidad de la función seno trazamos el gráfico de la función $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$



8.5 Otras funciones trigonométricas

Recordemos que:

a.) $\text{sen}\,(\alpha) = 0$ sí y sólo sí $\alpha = -\pi,\ \ \alpha = 0,\ \ \alpha = \pi,\ \ \alpha = 2\pi$ ... o sea

$\text{sen}(-\pi) = 0,\ \ \text{sen}\,0 = 0,\ \ \text{sen}\ \pi = 0,\ \ \text{sen}\,2\pi = 0$ ...

En general

$$\text{sen}(k \cdot \pi) = 0, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

b.) $\cos\,(\alpha) = 0$ sí y sólo sí $\alpha = \dfrac{-3\pi}{2},\ \ \alpha = \dfrac{-\pi}{2},\ \ \alpha = \dfrac{\pi}{2},\ \ \alpha = \dfrac{3\pi}{2};$ ... o sea

$\cos\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right) = 0,\ \ \cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 0,\ \ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ \ \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ ...

observemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{-3\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + \ -2\pi \\
\frac{-\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + \ -1 \cdot \pi \\
\frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi \\
\frac{-3\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi
\end{aligned}$$

En general

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sean $A = \{\alpha \in \mathbb{R} / \cos(\alpha) = 0\}, \quad B = \{\alpha \in \mathbb{R} / \operatorname{sen} \alpha = 0\}$ entonces

$A = \{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

Definición 13

a.) **Función tangente**

$$\begin{array}{rccc}
\text{Tangente}: & \mathbb{R} - A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{\text{sen}\ (\alpha)}{\cos\ (\alpha)}
\end{array}$$

Nota: Tangente (α) se denota $\tan(\alpha)$ o sea $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{sen}\ (\alpha)}{\cos\ (\alpha)}$

b.) **Función cotangente**

$$\begin{array}{rccc}
\text{Cotangente}: & \mathbb{R} - B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{\cos\ (\alpha)}{\text{sen}\ (\alpha)}
\end{array}$$

Nota: Cotangente (α) se denota $\cot(\alpha)$, o sea $\cot\ \alpha = \dfrac{\cos\ (\alpha)}{\text{sen}\ (\alpha)}$

c.) **Función secante**

$$\begin{array}{rccc} \text{Secante}: & \mathbb{R}-A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{1}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

Nota: Secante (α) se denota $\sec(\alpha)$, o sea $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$

d.) **Función cosecante**

$$\begin{array}{rccc} \text{Cosecante}: & \mathbb{R}-B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \end{array}$$

Nota: Cosecante (α) se denota $\csc(\alpha)$, o sea $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

Ejemplo 15

Calcule:

a.) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

b.) $\cot\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$

c.) $\sec(-\pi)$

d.) $\csc\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Solución

a.) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}$, o sea $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

b.) $\cot\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)} = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -1$ o sea $\cot\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = -1$

c.) $\sec(-\pi) = \dfrac{1}{\cos(-\pi)} = \dfrac{1}{\cos(\pi)} = \dfrac{1}{-1} = -1$ o sea $\sec(-\pi) = -1$

d.) $\csc\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

o sea $\csc\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Ejercicios 9

Calcule cada uno de los siguientes valores:

- Tangente a) $\tan\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$ b) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ c) $\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ d) $\tan(-3\pi)$
- Cotangente a) $\cot\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$ b) $\cot\left(\dfrac{-5\pi}{4}\right)$ c) $\cot\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)$ d) $\cot\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$
- Secante a) $\sec\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ b) $\sec\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)$ c) $\sec\left(\dfrac{-7\pi}{6}\right)$ d) $\sec(0)$
- Cosecante a) $\csc\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $\csc\left(\dfrac{-4\pi}{3}\right)$ c) $\csc\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ d) $\csc\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)$

Periocidad de las funciones tangente y cotangente

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan(\alpha), \quad \cos(\alpha) \neq 0$$

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\ \alpha, \quad \text{sen}(\alpha) \neq 0$$

Lo anterior dice que la tangente y cotangente son periódicas, de período π.

Nota: Este resultado se demostrará más adelante.

Periodicidad de las Funciones Secante y Cosecante

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\sec(\alpha + 2k\pi) = \sec\ \alpha, \quad \cos(\alpha) \neq 0$$

$$\csc(\alpha + 2k\pi) = \csc\ \alpha, \quad \text{sen}(\alpha) \neq 0$$

Demostración:

1. $\sec(\alpha + 2k\pi) = \sec(\alpha)$ se obtiene del hecho de que:

$$\begin{aligned} \sec(\alpha + 2k\pi) &= \frac{1}{\cos(\alpha + 2k\pi)} \\ &= \frac{1}{\cos(\alpha)} \\ &= \sec(\alpha) \end{aligned}$$

2. $\csc(\alpha + 2k\pi) = \csc(\alpha)$ se obtiene del hecho que:

$$\begin{aligned} \csc(\alpha + 2k\pi) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \\ &= \csc(\alpha) \end{aligned}$$

Signo de los Valores de las Funciones Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante

Con respecto a los signos de los valores de las funciones seno y coseno enunciadas anteriormente y de acuerdo a las definiciones tangente, cotangente, secante y cosecante obtenemos la siguiente tabla de signos:

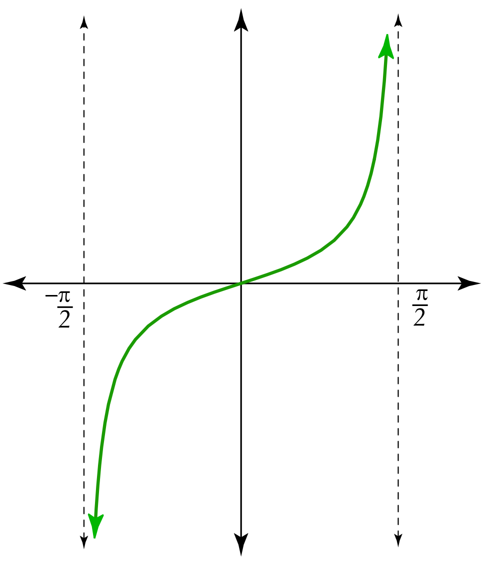
	Cuadrante			
	I	II	III	IV
α	0 — $\pi/2$	$\pi/2$ — π	π — $3\pi/2$	$3\pi/2$ —
$\tan(\alpha)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot(\alpha)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\sec(\alpha)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\csc(\alpha)$	$+$	$+$	$-$	$-$

which produces this table **Representación del gráfico de la tangente**

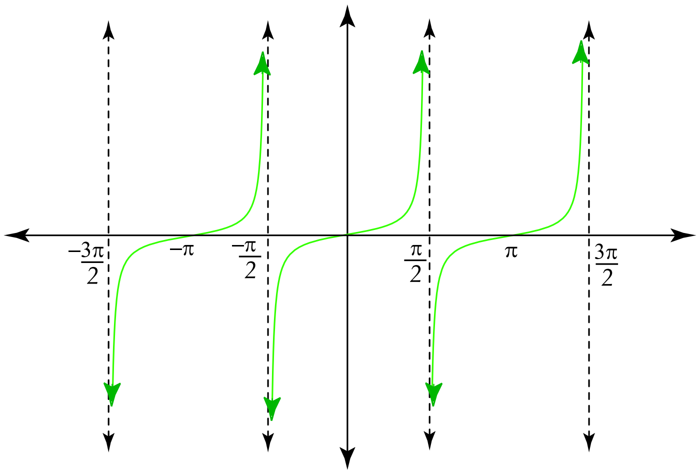
Para representar el gráfico de la tangente construimos la siguiente tabla de valores :

α	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(\alpha)$	indef	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	indef

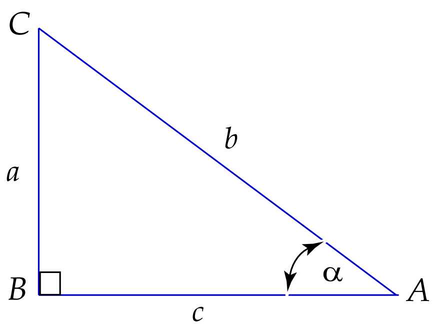
con los valores de la tabla anterior, construimos el trazo de la tangente en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



Dado que la tangente es una función periódica, de período π (o sea $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\ \alpha, \quad k \in \mathbb{R}$) el trazo correspondiente a la función tangente en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se repite cada π, obteniéndose así:



Considerándose el $\triangle ABC$ tal que $m\angle\ ABC = \dfrac{\pi}{2}$, sea α la medida de uno de sus ángulos internos agudos $\left(\text{o sea } 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ como se muestra en la figura:



Como $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ se tiene que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\dfrac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}}{\dfrac{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}}$$

o sea:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}$$

En forma similar se tiene que:

$$\cot(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}$$

Así con respuesta a la figura anterior y los resultados anteriores se obtiene que para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, se cumple:

a.) $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{c}$

b.) $\sec(\alpha) = \dfrac{b}{c}$

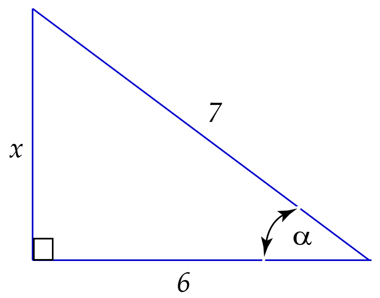
c.) $\cot(\alpha) = \dfrac{c}{a}$

d.) $\csc(\alpha) = \dfrac{b}{a}$

Ejemplo 16

Si $\cos(\alpha) = \dfrac{6}{7}$ y $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cot(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ y $\csc(\alpha)$.

Solución Como $\cos(\alpha) = \dfrac{6}{7}$ y $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ entonces se tiene que:



¿Porqué?

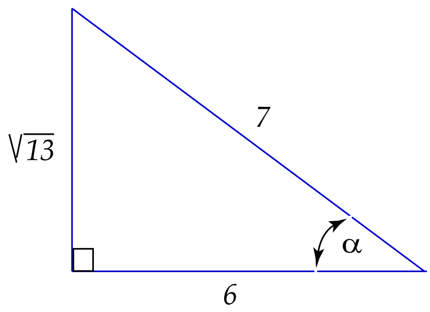
Como no sabemos cuanto mide el cateto opuesto al ángulo que mide α, hay que determinar su valor (usando el teorema de Pitágoras).

Sea x la medida del cateto opuesto al ángulo que mide α entonces:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 6^2 & = & 7^2 \\ x^2 + 36 & = & 49 \\ x^2 & = & 13 \\ |x| & = & \sqrt{13} \end{array}$$

por lo tanto $x = \sqrt{13}$ ó $x = -\sqrt{13}$; pero $x = -\sqrt{13}$ no nos sirve. ¿por qué?

Por lo que el otro cateto mide $\sqrt{13}$, o sea tenemos el triángulo:



Así pues:

1.) $\text{sen}\ (\alpha) = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$

2.) $\tan\ (\alpha) = \dfrac{\sqrt{13}}{6}$

3.) $\cot\ (\alpha) = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$

4.) $\sec\ (\alpha) = \dfrac{7}{6}$

5.) $\csc\ (\alpha) = \dfrac{7}{\sqrt{13}}$

Ejemplo 17

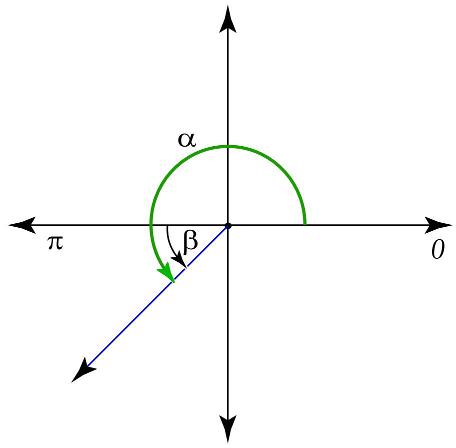
Si sen $\alpha = \dfrac{-3}{4}$ y $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule cos α, tan α, cot α, sec α *y* csc α.

Solución Observe que sen α es negativo, pues α esta en el tercer cuadrante

Como $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ entonces:

existe $\beta,\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2},$ tal que:

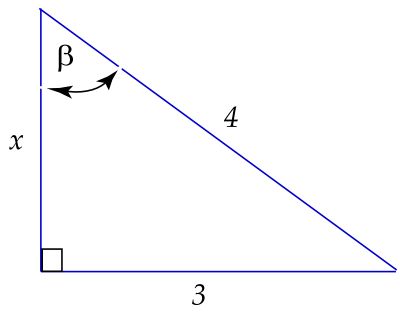
$\alpha = \pi + \beta$



Por lo que sen $(\alpha) =$ sen $(\pi + \beta) = -$ sen $(\beta) = \dfrac{-3}{4}$ de donde

$$\text{sen } (\beta) = \frac{3}{4}$$

Como sen $(\beta) = \dfrac{3}{4}$ y $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, entonces se tiene que:

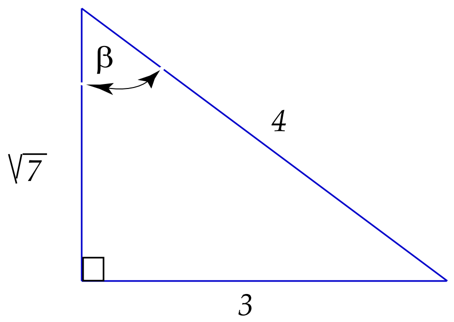


Como no sabemos cuánto mide el cateto adyacente al ángulo que mide $\beta,$ hay que determinar su valor (usando el teorema de Pitágoras).

Sea x la medida del cateto adyacente al ángulo que mide $\beta,$ entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 3^2 &= 4^2 \\ x^2 &= 16 - 9 \\ x^2 &= 7 \\ x &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

Así tenemos el triángulo siguiente:



Así pues:

1. $\cos\,(\alpha) = \cos\ (\pi + \beta) = -\cos\,(\beta) = \dfrac{-\sqrt{7}}{4}$

2. $\tan\,(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\,(\pi+\beta)}{\cos\,(\pi+\beta)} = \dfrac{-\operatorname{sen}\,(\beta)}{-\cos\,(\beta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\,(\beta)}{\cos\,(\beta)} = \tan\,(\beta) = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$

3. $\cot\,(\alpha) = \dfrac{\cos\,(\pi+\beta)}{\operatorname{sen}\,(\pi+\beta)} = \dfrac{-\cos\,(\beta)}{-\operatorname{sen}\,(\beta)} = \dfrac{\cos\,(\beta)}{\operatorname{sen}\,(\beta)} = \cot\,(\beta) = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

4. $\sec\,(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\pi+\beta)} = \dfrac{1}{-\cos\,(\beta)} = -\dfrac{1}{\cos\,(\beta)} = -\sec\,(\beta) = \dfrac{-4}{\sqrt{7}}$

5. $\csc\,(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\pi+\beta)} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}\,(\beta)} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}\,(\beta)} = -\csc\,(\beta) = \dfrac{-4}{3}$

Ejemplo 18

Si $\tan\,(\alpha) = -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcule $\operatorname{sen}\,(\alpha)$ y $\cos\,(\alpha)$

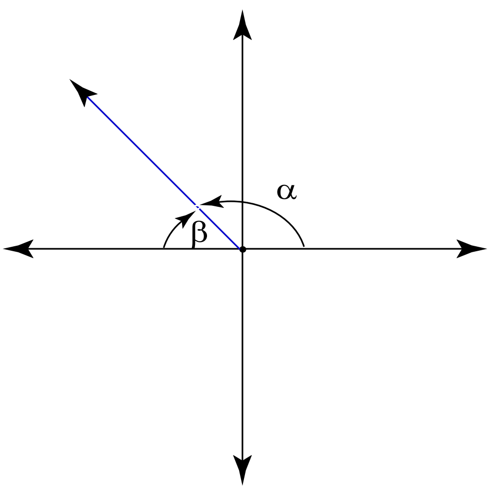
Solución

Observe que $\tan\,(\alpha)$ es negativo, pues α está en el segundo cuadrante.

como $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ entonces

existe β, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ tal que

$\alpha = \pi - \beta$

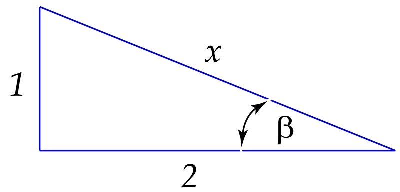


Por lo que:

$\tan\ \alpha = \tan\ (-\beta) = \dfrac{\text{sen}\ (\pi - \beta)}{\cos\ (\pi - \beta)} = \dfrac{\text{sen}\ (\beta)}{-\cos\ (\beta)} = -\tan\ (\beta) = \dfrac{-1}{2}$

de donde $\tan\ (\beta) = \dfrac{1}{2}$

Como $\tan\ (\beta) = \dfrac{1}{2}$ y $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, entonces se tiene que:



Usando el teorema de Pitágoras tenemos $x = \sqrt{5}$

Por lo que:

1. $\text{sen}\ (\alpha) = \text{sen}\ (\pi - \beta) = \text{sen}\ (\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

2. $\cos\ (\alpha) = \cos\ (\pi - \beta) = -\cos\ (\beta) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Ejemplo 19

Si $\sec\ (\alpha) = 4$ y $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Calcule: $\text{sen}\ (\alpha)$; $\tan\ \alpha$

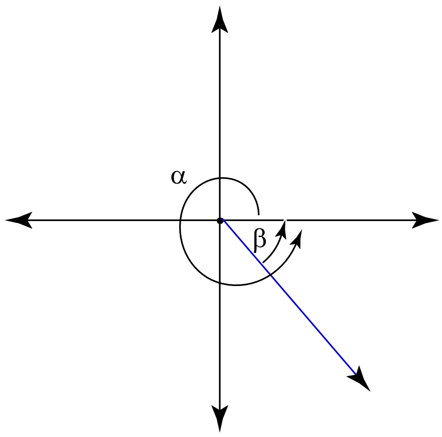
Solución

Observe que $\sec\ (\alpha)$ es positivo, pues α está en el cuarto cuadrante

Como $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, entonces:

existe β, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, tal que:

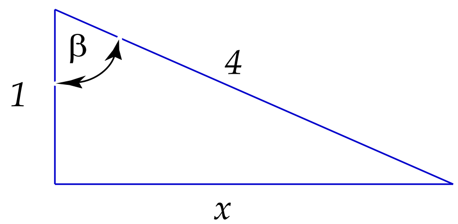
$\alpha = 2\pi - \beta$



Por lo que:

$$\sec(\alpha) = \sec(2\pi - \beta) = \frac{1}{\cos(2\pi - \beta)} = \frac{1}{\cos(2\pi + (-\beta))} = \frac{1}{\cos(-\beta)} = \frac{1}{\cos(\beta)} = \sec(\beta) = 4$$

Como $\sec\ \beta = 4$ y $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, entonces se tiene que:



Usando el teorema de Pitágoras tenemos que $x = \sqrt{15}$, por lo que:

1. $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(2\pi - \beta) = \operatorname{sen}[2\pi + (-\beta)] = \operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}(\beta) = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

2. $\tan(\alpha) = \tan(2\pi - \beta) = \dfrac{\operatorname{sen}[2\pi + (-\beta)]}{\cos[2\pi + (-\beta)]} = \dfrac{\operatorname{sen}(-\beta)}{\cos(-\beta)} = \dfrac{-\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = -\tan(\beta) = -\sqrt{15}$

Ejercicios 10

Calcule: $\cot(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sec(\alpha)$

1.) Si $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{-2}{3}$ y $\dfrac{-3}{2} < \alpha < 2\pi$

Calcule: $\cos(\alpha), \tan(\alpha)$, $\operatorname{sen}(\alpha)$

2.) Si $\tan(\alpha) = \dfrac{2}{3}$ y $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Calcule: $\operatorname{sen}(\alpha), \cos(\alpha), \csc(\alpha)$

3.) Si $\csc(\alpha) = -5$ y $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Calcule: $\cot(\alpha), \cos(\alpha), \sec(\alpha)$

■ **Ejemplo 20**

Determine el valor de A donde:

$$A = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(5\pi\right)$$

Solución

$$A = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(5\pi\right)$$

$$A = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(5\pi\right)$$

como:

$$\begin{array}{lll} (1)\quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (2)\quad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) & = & \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ & = & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{Por propiedad e-i} \\ & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ (3)\quad \cos\left(5\pi\right) & = & \cos\left(\pi + 4\pi\right) \qquad \text{Por periodicidad del coseno} \\ & = & -1 \end{array}$$

entonces:

$$\begin{array}{lll} A & = & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot -1 \\ A & = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ A & = & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Ejercicios 11

Para cada una de las siguientes expresiones determine el valor de A:

1.) $A = \cos^3\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

2.) $A = -\cos\left(3\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

3.) $A = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sec\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

8.6 La pendiente de una recta como la tangente del ángulo de inclinación de ésta

Definición 14

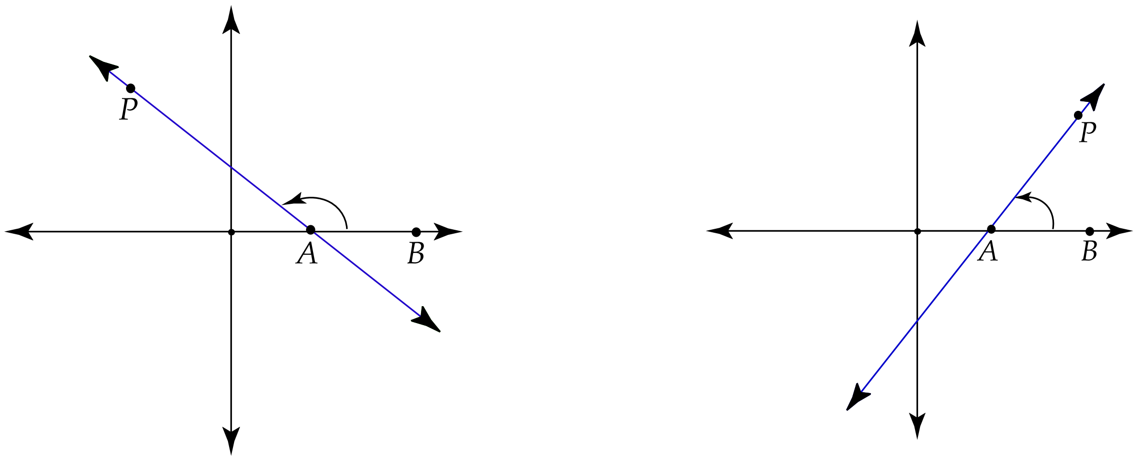
Sea L una recta de ecuación $y = mx + b$ con $m \neq 0$

Sea A el punto de intersección de L y el eje X tal que $A = (a, 0)$

Sea B un punto del eje X tal que $B = (b, 0)$ y $b > a$.

Sea $P \in L$ tal que $P = (x, y)$, con $y > 0$ (ver las siguientes figuras)

El $\measuredangle\, BAP$ se llama <u>ángulo de inclinación de la recta L</u>.



Definición 15

Sea L una recta de ecuación $y = b$, b constante real, entonces se dice que la medida del ángulo de inclinación es 0.

Nota: Si α es la medida del ángulo de inclinación de una recta entonces $0 < \alpha < \pi$

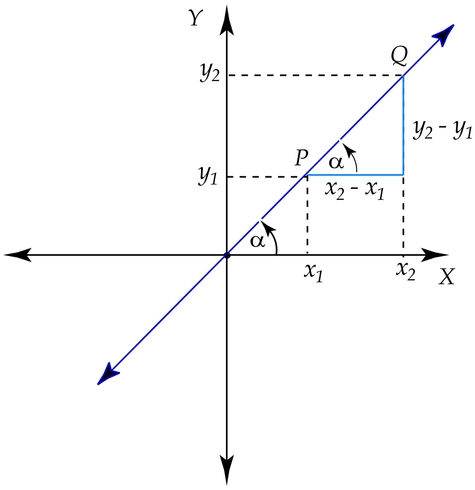
Nota: La pendiente de una recta es igual a la tangente de su ángulo de inclinación.

Justificación:

Sea L la recta de ecuación $y = mx + b$

Sea α la medida del ángulo de inclinación de L

Sean P y Q puntos de L tal que $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Sea α la medida del ángulo de inclinación de L, como se muestra en la figura siguiente



Sabemos que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pero $\tan(\alpha) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

por lo tanto:

$$m = \tan(\alpha)$$

Ejemplo 21

Determine la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es $\dfrac{2\pi}{3}$ y que contiene el punto $(\sqrt{3}, 2)$

Solución

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta, entonces $m = \tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} m &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ m &= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ m &= -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ m &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

por lo que $y = -\sqrt{3}x + b$, como $(\sqrt{3}, 2)$ es un punto de la recta, entonces:

$$\begin{aligned} 2 &= -\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + b \\ 2 &= -3 + b \\ 5 &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es $y = -\sqrt{3}x + 5$

Ejercicios 12

1. Determine la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es $\dfrac{\pi}{4}$ y contiene el punto $(-2, 2)$

2. Determine la ecuación de la recta que contiene el origen del sistema de coordenadas y cuyo ángulo de inclinación es π

Identidades

Una identidad es una igualdad que es verdadera para todo elemento del dominio de las variables que intervienen.

Ejemplo 22

1.) $x(x+1) = x^2 + x$; por propiedad distributiva esta igualdad es verdadera para todo número real.

2.) $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$; esta igualdad es verdadera para todo número real diferente de 3, pues 3 no pertenece al dominio de la variable.

Nota:

Es frecuente que en el enunciado de una identidad propuesta no se incluya ninguna mención explícita del subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre la cual la identidad está definida. Sin embargo, al comprobar la identidad se debe recordar que la identidad es válida para aquellos valores de la variable o variables para los cuales cada miembro de la identidad está definida.

8.7 Identidades trigonométricas

Algunas identidades trigonométricas importantes.

Nota: Las identidades trigonométricas que se demostrarán tomando como unidad de medida el radián, son también válidas si se considera como unidad de medida el grado.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$$

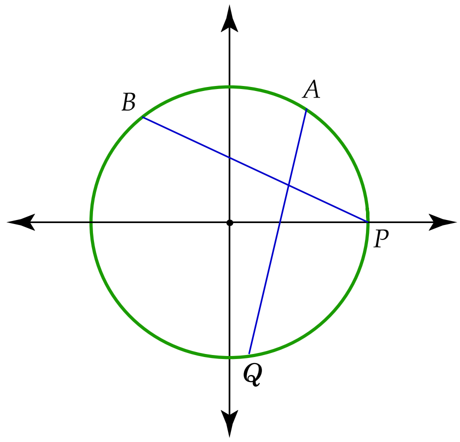
Demostración:

Para la demostración de esta identidad haremos uso de los siguientes resultados de la geometría plana.

i.) **Notación:** Si P y Q son puntos de un círculo C entonces $\widehat{PQ}$ denota el arco de extremos P y Q.

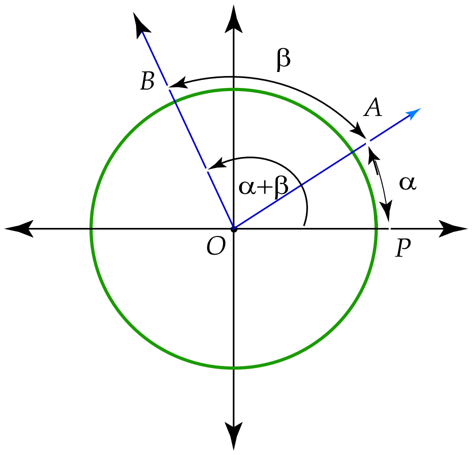
ii.) **Teorema:** Sean A, B, P y Q puntos del círculo C, entonces:

$$m(\widehat{BP}) = m(\widehat{AQ}) \Longleftrightarrow d(B,P) = d(A,Q)$$



Demostración (de la identidad 1)

Considere la siguiente figura:



donde:

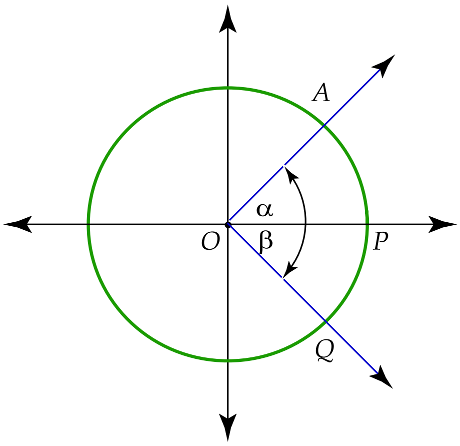
$$\begin{array}{rcl} A & = & (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) \\ B & = & (\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)) \\ P & = & (1,0) \end{array}$$

Con respecto a la figura anterior, tenemos:

$m\measuredangle\, POA = \alpha \Longrightarrow m(\widehat{PA}) = \alpha$ y $m\measuredangle\, AOB = \beta \Longrightarrow m(\widehat{AB}) = \beta$

entonces $m(\widehat{PB}) = m(\widehat{PA}) + m(\widehat{AB}) = \alpha + \beta$ (i)

Considere la siguiente figura:



donde:

$$\begin{array}{rcl} A & = & (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha)) \\ Q & = & (\cos(-\beta), \text{sen}(-\beta)) \\ P & = & (1, 0) \end{array}$$

Con respecto a la figura anterior tenemos:

$m\measuredangle\ AOP = \alpha \Longrightarrow m(\widehat{AP}) = \alpha$ y $m\measuredangle\ POQ = -\beta \Longrightarrow m(\widehat{PQ}) = \beta$

entonces $m(\widehat{AQ}) = m(\widehat{AP}) + m(\widehat{PQ}) = \alpha + \beta$ (ii)

de (i) y (ii) tenemos que $m(\widehat{PB}) = m(\widehat{AQ})$

de donde por el teorema anterior, $d(P, B) = d(A, Q)$ (*)

Además, por la figura tras anterior, obtenemos que:

$$\begin{array}{rcl} d(P, B) & = & \sqrt{[\cos(\alpha+\beta) - 1]^2 + [\text{sen}(\alpha+\beta) - 0]^2} \\ & = & \sqrt{\cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \text{sen}^2(\alpha+\beta)} \\ & = & \sqrt{\cos^2(\alpha+\beta) + \text{sen}^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1} \\ & = & \sqrt{1 - 2\cos(\alpha+\beta) + 1} \\ & = & \sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)} \end{array}$$

por lo que $d(P, B) = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)}$

y, por la figura anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
d(A,Q) &= \sqrt{[\cos(\alpha)-\cos(-\beta)]^2+[\operatorname{sen}(\alpha)-\operatorname{sen}(-\beta)]^2}\\
&= \sqrt{[\cos(\alpha)-\cos(\beta)]^2+[\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta)]^2}\\
&= \sqrt{\cos^2(\alpha)-2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+\cos^2(\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)+\operatorname{sen}^2(\beta)}\\
&= \sqrt{(\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\alpha))+(\cos^2(\beta)+\operatorname{sen}^2(\beta))-2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)}\\
&= \sqrt{1+1-2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)}\\
&= \sqrt{2-2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)}
\end{aligned}$$

por lo que $d(A,Q)=\sqrt{2-2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)}$

por lo tanto de (*) tenemos que:

$$d(B,P)=d(A,C)$$

o sea:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2-2\cos(\alpha+\beta)} &= \sqrt{2-2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)}\\
&=\\
2-2\cos(\alpha+\beta) &= 2-2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)\\
&=\\
-2\cos(\alpha+\beta) &= -2\cos(\alpha)\ \cos(\beta)+2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)\\
&=\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\ \cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

2. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\beta\in R$, entonces:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+\ -\beta)\\
&= \cos(\alpha)\ \cos(-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(-\beta) \quad \text{Por identidad 1}\\
&= \cos(\alpha)\ \cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Aplicando la identidad (1) o (2) y sustituyendo α y β por el valor correspondiente, se puede demostrar las siguientes identidades (llamadas fórmulas de reducción)

Sea $x\in\mathbb{R}$ entonces:

3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{sen} x$

4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$

5. $\cos(\pi+x)=-\cos x$

6. $\cos(\pi-x)=-\cos x$

7. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\operatorname{sen} x$

8. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen} x$

Ejercicios 13

Demostrar las identidades (3), (4), (5), (6), (7) y (8)

9. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\cos(\alpha)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Demostración:

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces existe β, $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

i.) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$

ii.) $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

$$\begin{array}{rcll}\cos(\alpha) & = & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right) & \text{por (i)}\\ & = & \operatorname{sen}(\beta) & \text{por identidad (4)}\\ & = & \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & \text{por (ii)}\end{array}$$

por lo tanto $\cos\ \alpha=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

10. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\text{sen }(\alpha+\beta)=\text{sen }(\alpha)\cdot\cos\,(\beta)+\text{sen }(\beta)\cdot\cos\,(\alpha)$$

Demostración:

Recuerde que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\text{sen }(x)$ por identidad (4)

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\text{sen }(\alpha+\beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]\\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\beta)+\text{sen }\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\text{sen}(\beta) \quad \text{por identidad (2)}\\
&= \text{sen }(\alpha)\cdot\cos\,(\beta)+\cos\,(\alpha)\cdot sen\ (\beta) \qquad \text{por identidad (4) y (5)}
\end{aligned}$$

11. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\beta\in\mathbb{R}$, entonces:

$$\text{sen }(\alpha-\beta)=\text{sen }(\alpha)\cdot\cos\,(\beta)-\text{sen }(\beta)\cdot\cos\,(\alpha)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\text{sen }(\alpha-\beta) &= \text{sen }(\alpha+\ -\beta)\\
&= \text{sen }(\alpha)\cdot\cos\,(-\beta)+\text{sen }(-\beta)\cdot\cos\,(\alpha) \quad \text{por identidad (10)}\\
&= \text{sen }(\alpha)\cdot\cos\,(\beta)-\text{sen }(\beta)\cdot\cos\,(\alpha) \qquad \text{por e-iii}
\end{aligned}$$

Aplicando las identidades (9) o (10) y sustituyendo α o β por el valor correspondiente, se pueden demostrar las siguientes identidades (llamadas fórmulas de reducción)

Sea $x\in\mathbb{R}$ entonces:

12. $\text{sen }\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos\,(x)$

13. $\text{sen }(\pi+x)=-\text{sen }(x)$

14. $\text{sen }(\pi-x)=\text{sen }(x)$

15. $\text{sen }\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos\,(x)$

16. $\text{sen }\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos\,(x)$

Ejercicios 14

Demostrar las identidades (11), (12), (13), (14), (15), (16).

Utilizando las identidades (1), (2), (10), (11) se puede demostrar que:

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in R$, entonces:

17. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan\ \beta}$

18. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan\ \beta}$

■ **Ejemplo 23**

Determinar:

a.) $\tan(15°)$

b.) $\cos(120°)$

Solución

a.) $\tan(15°)$

$15° = 45° - 30°$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\tan\ 15° &= \tan(45° - 30°) \\
&= \frac{\tan\ 45° - \tan\ 30°}{1 + \tan\ 45° \cdot \tan\ 30°} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tan(15°) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

b.) $\cos\,(120°)$

$120° = 2 \cdot 60°$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\cos\ 120° &= \cos\,(2 \cdot 60°) \\
&= \cos^2\ 60° - \text{sen}^2\ 60° \quad \text{por identidad (19)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{-2}{4} \\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

por lo tanto $\cos\,(120°) = \dfrac{-1}{2}$

Ejemplo 24

Determinar:

a.) $\tan\ 75°$

b.) $\cos\ 165°$

c.) $\text{sen}\ 255°$

d.) $\cot\,(-15)°$

En particular sí, en las identidades (1), (10) y (17), $\alpha = \beta$ obtenemos las identidades para el ángulo doble, a saber:

19. $\cos\ 2\alpha = \cos^2\ \alpha - \text{sen}^2\ \alpha$

20. $\text{sen}\ 2\alpha = 2\,\text{sen}\,(\alpha) \cdot \cos\,(\alpha)$

21. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\,(\alpha)}{1 - \tan^2\ \alpha}$

y si, en cada una de las identidades (19), (20) y (21), $\alpha = \dfrac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ obtenemos las identidades para el ángulo medio

22. $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{2}}$

23. $\cos \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos(x)}{2}}$

24. $\tan \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$

Ejercicios 15

Demostrar las identidades (19), (20), (21), (22), (23) y (24)

Usando las identidades trigonométricas anteriores, la definición de las funciones trigonométricas y las propiedades de las operaciones definidas en $\mathbb{R}$, es posible comprobar otras identidades trigonométricas.

Ejemplo 25

Comprobar la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cot(\alpha) \; + \; \cos(\alpha)}{\cot(\alpha)} = 2 \operatorname{sen}(\alpha)$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cot(\alpha) + \cos(\alpha)}{\cot(\alpha)} &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} + \cos(\alpha)}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}} \\
&= \frac{\dfrac{2 \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)} \\
&= 2 \operatorname{sen}(\alpha)
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cot(\alpha) \; + \; \cos(\alpha)}{\cot(\alpha)} = 2 \operatorname{sen}(\alpha)$$

Ejemplo 26

Comprobar la identidad: $\dfrac{1}{1+\text{sen } A}+\dfrac{1}{1-\text{sen } A}=2\sec^2 A$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\text{sen } A}+\frac{1}{1-\text{sen } A} &= \frac{1-\text{sen } A+1+\text{sen } A}{(1+\text{sen } A)(1-\text{sen } A)}\\
&= \frac{2}{1-\text{sen}^2 A}\\
&= \frac{2}{\cos^2 A}\\
&= 2\cdot\frac{1}{\cos^2 A}\\
&= 2\cdot\sec^2 A
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{1+\text{sen } A}+\frac{1}{1-\text{sen } A}=2\sec^2 A$$

Ejemplo 27

Comprobar la identidad: $\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}=\cos^2(\alpha)$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} &= \frac{1+\cos^2(\alpha)-\text{sen}^2(\alpha)}{2}\\
&= \frac{\cos^2(\alpha)+1-\text{sen}^2(\alpha)}{2}\\
&= \frac{\cos^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{2}\\
&= \frac{2\cos^2(\alpha)}{2}\\
&= \cos^2(\alpha)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}=\cos^2(\alpha)$

Ejemplo 28

Comprobar la identidad: $\cos 2A+\text{sen } 2A\cdot\tan A=1$

Solución

$$\begin{aligned}
\cos\ 2A+\text{sen}\ 2A\cdot\tan\ A &= \cos^2\ A-\text{sen}^2\ A+2\,\text{sen}\ A\cdot\cos\ A\cdot\frac{\text{sen}\,A}{\cos A}\\
&= \cos^2\ A-\text{sen}^2\ A+2\,\text{sen}^2\ A\\
&= \cos^2\ A+\text{sen}^2\ A\\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\cos\ 2A+\text{sen}\ 2A\cdot\tan\ A=1$

Ejemplo 29

Comprobar la identidad: $\csc\ A+\cot\ A=\dfrac{\text{sen}\ A}{1-\cos\ A}$

Solución

$$\begin{aligned}
\csc\ A+\cot\ A &= \frac{1}{\text{sen}\ A}+\frac{\cos\ A}{\text{sen}\ A}\\
&= \frac{1+\cos\ A}{\text{sen}\ A}\\
&= \frac{1+\cos\ A}{\text{sen}\ A}\cdot\frac{1-\cos\ A}{1-\cos\ A}\\
&= \frac{(1+\cos\ A)\cdot(1-\cos\ A)}{\text{sen}\ A\cdot(1-\cos\ A)}\\
&= \frac{1-\cos^2\ A}{\text{sen}\ A\cdot(1-\cos\ A)}\\
&= \frac{\text{sen}^2\ A}{\text{sen}\ A\cdot(1-\cos\ A)}\\
&= \frac{\text{sen}\ A}{1-\cos\ A}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\csc\ A+\cot\ A=\dfrac{\text{sen}\ A}{1-\cos\ A}$

Ejemplo 30

Compruebe que: si $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces: $\tan\,(\alpha + k \cdot \pi) = \tan\ \alpha$

Solución

$$\begin{aligned}
\tan\,(\alpha + k\pi) &= \frac{\text{sen}\,(\alpha + k\pi)}{\cos\,(\alpha + k\pi)} \\
&= \frac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\ k\pi + \text{sen}\ k\pi \cdot \cos\ \alpha}{\cos\ \alpha \cdot \cos\ k\pi - \text{sen}\ \alpha \cdot \text{sen}\ k\pi} \\
&= \frac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\ k\pi}{\cos\ \alpha \cdot \cos\ k\pi} \quad \text{¿Por qué?} \\
&= \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} \\
&= \tan\ \alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tan\,(\alpha + k\pi) = \tan\ \alpha$

Ejercicios 16

Compruebe cada una de las siguientes identidades:

1. $\cos\ x \cdot \cos\ (-x) + \text{sen}^2\ x = 1$

2. $\tan\ x \cdot \cot\ (-x) + \text{sen}^2\ x + \cos^2\ x = 0$

3. $\cot^2\ x \cdot \cos^2\ x = \cot^2\ x - \cos^2\ x$

4. $\dfrac{\text{sen}\ (x)}{\csc\ x} + \dfrac{\cos\ (x)}{\sec\ x} = 1$

5. $\sec\ x \cdot (1 - \text{sen}^2\ x) = \cos\ x$

6. $\text{sen}^4\ x = \dfrac{1 - \cos^2\ x}{\csc^2\ x}$

7. $\cos\ 2A = \cos^4\ A - \text{sen}^4\ A$

8. $\tan\ A + \tan\ B = \dfrac{\text{sen}\ (A + B)}{\cos\ A \cdot \cos\ B}$

9. $\cot\ x - \tan\ x = 2\cot\ 2x$

10. $\tan\ \dfrac{x}{2}(1 + \cos\ (x)) = \text{sen}\ (x)$

11. $(\tan\ x + \cot\ x) \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos\ x = 1$

12. $2\csc\ 2x = \sec\ x \cdot \csc\ x$

13. $\text{sen}\ (A + B) + \text{sen}\ (A - B) = 2\,\text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ B$

14. $\text{sen}\ (A + B) \cdot \text{sen}\ (A - B) = \cos^2\ B - \cos^2\ A$

15. $-\cos\ (x) \cdot \cos\ (-x) + \text{sen}\ (x) \cdot \text{sen}\ (-x) = -1$

16. $1 + \tan^2\ x = \sec^2\ x$

17. $\tan\ x + \cot\ x = 2\csc 2\ x$

18. $\dfrac{\sec\ x}{\tan\ x + \cot\ x} = \text{sen}\ (x)$

19. $\cos(x + \dfrac{\pi}{3}) - \cos\ (x - \dfrac{\pi}{6}) = 0$

20. $\text{sen}^2\ x = \dfrac{1 - \cos\ (x)}{2}$

21. $\tan\ A - \tan\ B = \dfrac{sen\ (A - B)}{\cos\ A \cdot \cos\ B}$

22. $\tan\ A = \dfrac{\text{sen}\ 2A}{1 + cos\ 2A}$

23. $\text{sen}\ (x) \cdot cos\ x = \dfrac{\text{sen}\ 2x}{2}$

24. $\tan\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos\ (x)}{\text{sen}\ (x)}$

8.8 Ecuaciones trigonométricas

Para resolver ecuaciones en las que intervienen valores de funciones trigonométricas, se pueden usar varios métodos, algunos algebraicos (factorización, por ejemplo) y otros que consisten en la aplicación de las identidades trigonométricas.

■ **Ejemplo 31**

Resolver: $\cos\ (x) = \dfrac{1}{2}$

Solución

Como $\cos\ (x)$ es positiva, esta ecuación tiene soluciones en el primer y cuarto cuadrante.

En el primer cuadrante, una solución particular del $\cos\ (x) = \dfrac{1}{2}$ es $\dfrac{\pi}{3}$, pues $\cos\ \left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Pero como el coseno es función periódica de periodo 2π se tiene que $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2};\ n\in\mathbb{Z}$.

Así tenemos que todos los números de la forma $\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ son solución de $\cos(x)=\frac{1}{2}$ o sea:

$S_1=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

En el cuarto cuadrante, una solución particular de $\cos(x)=\frac{1}{2}$ es $\frac{-\pi}{3}$ pues $\cos(-\pi/3)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ y tomando en cuenta el periodo de la función coseno, todos los números de la forma $\frac{-\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ son solución de $\cos(x)=\frac{1}{2}$ o sea:

$$S_2=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{-\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$$

Así $S=S_1\cup S_2$ es decir $S=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{\pi}{3}+2n\pi \text{ ó } x=\frac{-\pi}{3}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

■ Ejemplo 32

Resolver $\cos(x)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Solución

Como $\cos(x)$ es negativo, esta ecuación tiene soluciones en el segundo y tercer cuadrante.

En el segundo cuadrante, una solución particular de $\cos(x)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ es $\pi-\frac{\pi}{4}$, o sea $\frac{3\pi}{4}$ pues:

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Así $S_1=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

En el tercer cuadrante, una solución particular de $\cos(x)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ es $\pi+\frac{\pi}{4}$, o sea $\frac{5\pi}{4}$, pues

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Así $S_2=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{5\pi}{4}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

Por lo tanto $S=S_1\cup S_2$, es decir

$S=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x=\frac{3\pi}{4}+2n\pi \text{ ó } x=\frac{5\pi}{4}+2n\pi, n\in\mathbb{N}\right\}$

■ Ejemplo 33

Resolver $\tan(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución

Como $\tan(x)$ es positiva, esta ecuación tiene soluciones en el primer y tercer cuadrante.

En el primer cuadrante una solución particular de $\tan(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ es $\dfrac{\pi}{6}$, pues
$\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, pero como la función es periódica, de periodo π ,
se tiene que:

$$\tan(x) = \left(\frac{\pi}{6} + n\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

o sea, todos los números de la forma $\dfrac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ son solución de $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, así

$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

En el tercer cuadrante una solución particular de $\tan(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ es $\pi + \dfrac{\pi}{6}$, o sea $\dfrac{7\pi}{6}$, pues $\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Observe además que $\dfrac{7\pi}{6}$ está contenida en S_1 , pues $\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + \pi$ por lo tanto $S = S_1$ o sea

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

■ Ejemplo 34

Resolver $\operatorname{sen}(2x) = 3\operatorname{sen}(x)$

Solución

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) = 3\operatorname{sen}(x) &\Longrightarrow 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos x = 3\operatorname{sen} x \\
&\Longrightarrow 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) - 3\operatorname{sen}(x) = 0 \\
&\Longrightarrow \operatorname{sen}(x)\,(2\cos(x) - 3) = 0 \\
&\Longrightarrow \textbf{a)}\ \operatorname{sen}(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \textbf{b)}\ 2\cos x - 3 = 0
\end{aligned}$$

a.) Sí $\operatorname{sen}(x) = 0$, entonces $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$; o sea

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}/\ x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

b.) Sí $2\cos(x) - 3 = 0$ entonces

$2\cos(x) = 3 \Longrightarrow \cos(x) = \dfrac{3}{2}$, por lo que $S_2 = \varnothing$ ¿Por qué?

Así $S = S_1$ ó $S = \{x \in \mathbb{R}/x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$