MATEMÁTICA BÁSICA CLASE 22-23

FRACCIONES PARCIALES

PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITAN0

MEDELLÍN OCTUBRE 2011

FRACCIONES PARCIALES

- **Conceptos previos**
- 1.Si dos polinomios son iguales los coeficientes de los respectivos terminos deben ser iguales.

  Recuerde que coeficiente es todo lo que esta multiplicando o es factor de la x(elevada a cualquier exponente).

- $5x^3+ 3x^2+ 4x+ 2= Ax^3+ Bx^2+ Cx+ D$

  A=5, B=3, C=4, D=2

  Si no aparece algún término en cualquiera de los lados entonces su coeficiente es cero.

- coeficiente *término independiente*
- $3x = x(2A + B) + \ (A - B)$

Efrén Giraldo T.

- Igualar coeficientes respectivos
- 3= 2A+B (1)

Efrén Giraldo T.

- 0= A-B porque no hay término independiente en el lado izquierdo

Efrén Giraldo T.

- 0= A-B $\longrightarrow$ A=B se reemplaza en (1)

Efrén Giraldo T.

- 3= 2A+A

Efrén Giraldo T.

- 3= 3A
- A= 1 y como A= B B=1

- Cuando hay sumas o restas de términos semejantes se agrupan y se saca el factor común.

Efrén Giraldo T.

- $5x^3 + 3x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 4x + 3x + 2 = Ax^3 + Ex^3 + Bx^2 + Fx^2 + Cx + D$

Efrén Giraldo T.

- $8x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = (A+E)x^3 + (B+F)x^2 + Cx + D$

Efrén Giraldo T.

- $8 = A+E$ $\quad 5 = B+F$ $\quad 7 = C$ $\quad D = 2$

- 2. En números complejos vimos que todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar completamente en factores lineales (ax+b) o en lineales y factores cuadráticos (ax^2+ b) irreductibles(no se puede reducir más en factores reales)

Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.

- $X^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

Efrén Giraldo T.

- Si se trata de factorizar (x^2+1) da complejos

Efrén Giraldo T.

- $X^2=-1$ $\quad x=\pm\sqrt{-1}=\pm i \qquad x=i \qquad x=-i$

Efrén Giraldo T.

- De donde $(x^2+1)=(x-i)(x+i)$ y por tanto
- $X^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$
-

- 3.Una fracción algebraica dada donde el **numerador está en función de x y su denominador es de <u>orden mayor que el numerador</u>**, se puede expresar como la suma de fracciones más sencillas llamadas "Fracciones Parciales".

Efrén Giraldo T.

- El requisito más importante es que el grado del polinómio del denominador sea estrictamente mayor que el grado del numerador.

- Por tanto las fracciones parciales se utilizan para descomponer expresiones racionales a sumas de expresiones más simples

Hay cuatro casos:

- 1) Descomposición a fracciones parciales en la cual cada denominador es lineal **(ax+b)** y diferente. Factor lineal es aquel que dentro del paréntesis, la x no tiene un exponente diferente de 1.

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- 2) Descomposición en fracciones parciales donde aparece por lo menos un factor lineal repetido o elevado a un exponente n mayor de **1** **$(ax + b)^n$.**

Efrén Giraldo T.

- 3) Descomposición en fracciones parciales con un factor cuadrático $(ax^2 + b)$ irreducible a reales

Efrén Giraldo T.

- 4) Descomposición en fracciones parciales con factor cuadrático repetido.

Caso 1 . El denominador es un producto de **factores lineales (ax+b) diferentes o no repetidos**

Efrén Giraldo T.

Sea la fracción dada $\dfrac{3x}{2x^2-x-1}$

Efrén Giraldo T.

1. Fijarse si el grado de x del numerador es **menor que la del denominador.** Si es mayor realizar una división larga para bajar el grado de la función del numerador.
2. Siempre factorizar el denominador. $2x^2 - x - 1$

Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.

$$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$$

- 3. Colocar la fracción con los términos factorizados a la izquierda

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- $\frac{3x}{(x-1)(2x+1)}$ (1) tenemos en el denominador dos factores lineales diferentes.

- 4. Expresar la fracción factorizada igual a una suma de fracciones donde los numeradores son una letra y los denominadores son los factores obtenidos así:

Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.

- $\frac{3x}{(x-1)(2x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(2x+1)}$ (2)

- 5. Hallar el mcm del denominador. Generalmente es el producto de los factores hallados anteriormente.

Efrén Giraldo T.

- $mcm = (x-1)(2x+1)$.

- 6. Multiplicar todos los términos de la ecuación obtenida por el ***mcm*** *y simplificar.*

Efrén Giraldo T.

- $\frac{3x\cancel{(x-1)}\cancel{(2x+1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(2x+1)}} = \frac{A\cancel{(x-1)}(2x+1)}{\cancel{(x-1)}} + \frac{B(x-1)\cancel{(2x+1)}}{\cancel{(2x+1)}}$

Efrén Giraldo T.

- $3x = A(2x+1) + B(x-1)$

- 7. Destruir paréntesis. Organizar términos en orden respecto a x

Efrén Giraldo T.

- $3x = A2x + A + Bx - B$ =6 $= 2Ax + Bx + A - B$
- $3x = x(2A+B) + \ (A-B)$

- 8. Igualar coeficientes respectivos

Efrén Giraldo T.

- 3= 2A+B (3) 0= A-B (4) porque no hay término independiente en el lado izquierdo.

Efrén Giraldo T.

- De (4) A=B

Efrén Giraldo T.

- Reemplazar en (3)

Efrén Giraldo T.

- 3= 2A+A
- 3= 3A

Efrén Giraldo T.

- A= 1 B=1

- 8. Reemplazar en (2) los valores de A y B

Efrén Giraldo T. Efrén Giraldo T.

- $$\frac{3x}{(x-1)(2x+1)} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(2x+1)}$$

Sea $f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}$ Primero factorizar el denominador

$f(x)=\frac{1}{(x+3)(x-2)}$ (1)

Tenemos entonces dos factores lineales no repetidos

$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}=\frac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}+\frac{\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}$ (2) mcm= $(x+3)(x-2)$. Multiplicar por mcm

$$\frac{\mathbf{1}\cancel{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}\cancel{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}}{\cancel{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}\cancel{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}}=\frac{\boldsymbol{A}\cancel{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}{\cancel{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}}+\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})\cancel{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}}{\cancel{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}}$$

1= A(x-2) +B(x+3) $\rightarrow$ 1= Ax-2A +Bx+3B

1= Ax +Bx+3B-2A 1= (A +B)x+ (3B-2A) No hay termino en x en lado izquierdo.

Por tanto

A +B=0 $\rightarrow$ A=-B (3) 1=3B-2A (4)

(3) en (4) 3B -2(-B)=1 3B+2B=1 5B=1 B=1/5 A=-1/5 reemplazando en (2)

$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}$

Resolver $\frac{4y^2-7y+12}{y(y+2)(y-3)}$ Efrén Giraldo T.

Como el denominador ya esta factorizado, ahora descompondremos en fracciones:

$$\frac{4y^2-7y+12}{y(y+2)(y-3)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{(y+2)}+\frac{C}{(y-3)}$$

mcm=y(y+2)(y-3)

Bueno ahora tendremos que multiplicar a cada fracción por: $y(y+2)(y-3)$

Y nos quedaría de esta forma:

$$y(y+2)(y-3)*\frac{A}{y}+y(y+2)(y-3)*\frac{B}{(y+2)}+y(y+2)(y-3)*\frac{C}{(y-3)}$$

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

Despues de multiplicar cada fracción el resultado sería: $A(y+2)(y-3)+By(y-3)+Cy(y+2)=4y^2-7y+12$

$$A(y^2-3y+2y-6)+By^2-3By+Cy^2+2Cy=4y^2-7y+12$$

$$Ay^2-3Ay+2Ay-6A+By^2-3By+Cy^2+2Cy=4y^2-7y+12$$
$$y^2(A+B+C)-Ay-3By+2Cy-6A=4y^2-7y+12$$
$$y^2(A+B+C)+y(-A-3B+2C)-6A=4y^2-7y+12$$

Efrén Giraldo T.

ahora encontramos polinomios que parescan tener las mismas características:

$$A+B+C=4$$
$$-A-3B+2C=-7$$
$$-6A=12$$

(Wikimatematica,2011)

Caso 1 Todos los factores del denominador son distintos. Efrén Giraldo T.

$$\frac{3x-2}{x^3-x^2-2X}$$

Factorizamos el denominador $x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1)$

A cada factor lineal $ax+b$ que esté una sola vez en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una sola fracción. Efrén Giraldo T.

simple de la forma $\frac{A}{ax+b}$ donde A es una constante cuyo valor habrá que calcular.

En el ejemplo descomponemos la fraccion en tres fracciones cuyos numeradores seran A, B, C. Observa que el grado del denominador es tres y es el mismo numero de constantes por determinar.

$$\frac{3x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{c}{x+1}$$

Efrén Giraldo T.

$$=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{}$$

mcm= $x(x-2)(x+1)$

Multiplicar por $x(x-2)(x+1)$

$$\frac{(3x-2)\;x(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A\,x(x-2)(x+1)}{x}+\frac{B\;x(x-2)(x+1)}{x-2}+\frac{c}{x+1})$$

$$3x-2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

$$A=1 \quad B=\frac{2}{3} \quad C=-\frac{5}{3}$$

$$\frac{3x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{1}{x}+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{5}{3}}{x+1}$$

(Wikimatematica,2011)

- Caso 2 . **El denominador** es un producto de **factores lineales (ax+b) y algunos se repiten en la forma $(ax+b)^n$**. (Puede incluir factores del caso 1.

Efrén Giraldo T.

-

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- a)Un factor lineal repetido es un término $(x\text{-}a)^n$, donde a es un número real y n es un entero positivo mayor de 1.

Efrén Giraldo T.

- Note que se considera lineal es a la parte interna del paréntesis

- Si $(x-a)^n$ aparece en el denominador de una expresión racional, la descomposición contiene n fracciones parciales con **numeradores y denominadores constantes** comenzando desde el menor exponente hasta el mayor:

Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.

$$(x-a)^n = (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$$

y quedará así:

- $$\frac{1}{(x-a)^n} = \frac{A}{(\mathbf{x-a})} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \cdots \frac{D}{(x-a)^n}$$

Efrén Giraldo T.

- Resolver $\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}$

Efrén Giraldo T.

- Como ya está factorizado se va al paso 3 y 4 directamente. No preocuparse por el numerador.

Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.

- $$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \quad (3)$$

Efrén Giraldo T.

- mcm = $x(x-1)^3$

- Al multiplicar por $x(x-1)^3$ y simplificar todos los términos de (3)

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- La ecuación queda así:

- $x^2+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2$ +Cx(x-1) +Dx

Efrén Giraldo T.

- $x^2+1 = A(x^3-3x^2+3x-1) + Bx(x^2-2x+1) + Cx^2 - Cx + Dx$

Efrén Giraldo T.

- $x^2+1 = Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + Bx^3 - 2Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx + Dx$

Efrén Giraldo T.

- $x^2+1 = x^3(A+B) + x^2(-3A-2B+C) + x(3A+B-C+D) - A$

- $x^2+1 = (A+B)x^3 + (-3A-2B+C)x^2 + (3A+B-C+D)x - A$

- A+B=0 porque no hay término en lado $izquierdo$

Efrén Giraldo T.

- $-3A-2B+C$ =1 el coeficiente en x^2 $en\ el\ lado\ izquierdo$ es 1

Efrén Giraldo T.

- $3A+B-C+D-A=0$ *no hay término en* $x^3\ en\ el\ lado\ izquierdo$

Efrén Giraldo T.

Efrén Giraldo T.

- $-A$=1 *el término independiente en el lado izquierdo es 1*
-

- $A+B=0$ (4)

Efrén Giraldo T.

- $-3A-2B+C=1$ (5)
- $3A+B-C+D-A=0$ (6)

Efrén Giraldo T.

- $-A=1$

Efrén Giraldo T.

- $A=-1$ (7)
- (7) en (4) $-1+B=0$ $B=1$ (8)

Efrén Giraldo T.

- (7) y (8) en (5) $-3(-1)-2(1)+C=1$

Efrén Giraldo T.

- $C=0$

- *A=-1   B=1   C=0   D=2*

Efrén Giraldo T.

- *Reemplazar en (3)*

Efrén Giraldo T.

- $\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{0}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$

Efrén Giraldo T.

- $\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^3}$

Efrén Giraldo T.

Caso 2 Algunos de los factores lineales del denominador se repiten. Efrén Giraldo T.

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$$

Factorizamos el denominador

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}$$

El factor repetido es $(x-1)^2$, se escribe la fraccion con el denominador $(x-1)^2$ y todas las potencias inferiores, en este caso Efrén Giraldo T.

con denominador $(x-1)$

$$\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)^2)}+\frac{C}{(x+1)}$$

Reducimos a una sola fraccion, aplicando el mcm mcm = (x + 1(x -1)^2

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Como los dos miembros de la igualdad tienen el mismo denominador, entones los numeradores tambien deben ser iguales, por lo tanto Efrén Giraldo T.

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-1)$$

Efectuando las operaciones el segundo miembro de la igualdad y agrupando los coeficientes de x^2, x y del termino independiente

queda

$$\begin{aligned}3x+5&=A(x^2-2x+1)+Bx+B+Cx^2-c\\&=Ax^2+2Ax+A+Bx+B+Cx^2-c\\&=(A+C)x^2+(B-2A)x+(A+B-C)\end{aligned}$$

(Wikimatematica,2011)

Hemos identificado los coeficientes de las mismas potencias de x, a continuacion establecemos uns sistema de ecuaciones

$$A+C=0 \quad (1)$$
$$-2A+B=3 \quad (2)$$
$$-3A+C=5 \quad (3)$$

Efrén Giraldo T.

con (2) y (3), multiplicando (3) por -1

$$-2A+B=3$$
$$-A-B+C=-5$$
$$-3A+C=-2 \qquad (4)$$

Efrén Giraldo T.

Continuar hasta terminar…….

(Wikimatematica,2011)

Evalúe la siguiente $\dfrac{2x+5}{(x-3)^2}$ utilizando las

Efrén Giraldo T.

fracciones parciales:

Efrén Giraldo T.

$$\frac{2x+5}{(x-3)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

Al multiplicar todos los términos por el **mcm** $(x-3)^2$

Efrén Giraldo T.

se obtiene $2x+5=A(x-3)+B$ y esta ecuación produce

Efrén Giraldo T.

$A=2 \text{ y } B=11$

Efrén Giraldo T.

1. Por tanto se tiene: $\dfrac{2x+5}{(x-3)^2}=\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{11}{(x-3)^2}$

Caso 3 Descomposición en fracciones parciales con
Efrén Giraldo T.
un factor cuadrático irreducible a reales (ax^2+ b) no
Efrén Giraldo T.
repetido. Pueden incluir factores del caso 1 y 2.

a) En este caso el numerador se coloca en la
Efrén Giraldo T.
forma Ax +B para los factores cuadráticos.

- b) **Factorizar el denominador** para obtener un
Efrén Giraldo T.
producto de factores lineales de la forma **ax +b**,
Efrén Giraldo T.
o **factores cuadráticos irreductibles forma** $x^2 + b$

- c) Colocar la fracción con los términos
Efrén Giraldo T.
factorizados

Ejemplo Caso III

Sea $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}$ podemos notar que x^2+1 es una cuadrática irreducible ya que su solución es compleja entonces para este

Efrén Giraldo T.

factor escribimos una suma de la forma $\frac{Ax+B}{x^2+1}$

y para el factor $(x+1)^2$ escribimos las fracciones $\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$ (Corresponde al caso 2)

Efrén Giraldo T.

Sumamos estas fracciones y tenemos la expresion en fraciones parciales para $f(x)$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

mcm= $(x+1)^2(x^2+1)$

Efrén Giraldo T.

$$\frac{X\cancel{(x+1)^2}\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(x+1)^2}\cancel{(x^2+1)}} = \frac{(Ax+B)(x+1)^2\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(x^2+1)}} + \frac{C\cancel{(x+1)}^2(x^2+1)}{\cancel{(x+1)}} + \frac{D\cancel{(x+1)^2}(x^2+1)}{\cancel{(x+1)^2}}$$

Efrén Giraldo T.

Terminar….

Descomponer en fracciones parciales: $\frac{1}{x^3+10x}$

Efrén Giraldo T.

$\text{Denominador} = x(x^2+10)$

$\frac{1}{x(x^2+10)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+10}$

$A(x^2+10)+(Bx+C)x = 1$

$Ax^2+10A+Bx^2+Cx = 1$

$(A+B)x^2+Cx+10A = 1$

Efrén Giraldo T.

los valores se toman de la igualdad.

$A+B=0$

$C=0$

$10A=1$

Efrén Giraldo T.

$A = 1/10$

$B = -1/10$

$\frac{1}{x(x^2+10)} = \frac{1}{10x} - \frac{x}{10(x^2+10)}$

Efrén Giraldo T.

(Wikimatematica,2011)

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

Primero observo que el grado del numerador y denominador son iguales por lo que tengo que realizar una división larga.

$$\begin{array}{r|l} 4\cancel{x^3} - x^2 + 15x - 29 & 2x^3 - x^2 + 8x - 4 \\ \cline{2-2} -\cancel{4x^3} + 2x^2 - 16x + 8 & 2 \\ \cline{1-1} x^2 \;\; - x \;\; - 21 & \end{array}$$

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} + 2$$

Factorizo el denominador: $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x-1) + 4(2x-1) = (x^2+4)(2x-1)$

$x^2 + 4$ es un término **cuadrático irreducible** por lo que ahora opero asi:

$x^2 + 4$ es un término **cuadrático irreducible** por lo que ahora opero asi:

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}$$

Operamos el mínimo común denominador $\left(x^2+4\right)\left(2x-1\right)$

Efrén Giraldo T.

$x^2-x-21=\left(Ax+B\right)\left(2x-1\right)+C\left(x^2+4\right)$ **Multiplico las letras en los paréntesis**

$x^2-x-21=2Ax^2-Ax+2Bx-B+Cx^2+4C$ **Quito los paréntesis**

$x^2-x-21=2Ax^2+Cx^2-Ax+2Bx-B+4C$ **Los ordeno**

$x^2-x-21=x^2\left(2A+C\right)+x\left(-A+2B\right)+\left(-B+4C\right)$ **Factorizo asi**

Formar las ecuaciones:

Efrén Giraldo T.

$2A+C=1$

$-A+2B=-1$

$-B+4C=-21$

(Sectormatematica, 2011)

Efrén Giraldo T.

$$17C=-85$$
$$C=-5$$

$$-B+4C=-21$$
$$-B=-21+20$$
$$B=1$$

$$A-2B=1$$
$$A=1+2B$$
$$A=1+2$$
$$A=3$$

RESPUESTA:

$$\frac{4x^3-x^2+15x-29}{2x^3-x^2+8x-4}=2+\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=2+\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x-1}=2+\frac{3x+1}{x^2+4}+\frac{-5}{2x-1}$$

Efrén Giraldo T.

(Sectormatematica, 2011)

- **Caso 4 factores cuadráticos repetidos**
- **Pueden incluir factores del caso 1,2, 3.**

- **a) En este caso el numerador también se coloca en la forma Ax +B para los factores cuadráticos.**

- b) **Factorizar el denominador** para obtener un producto de factores lineales de la forma **ax +b**, o **factores cuadráticos irreducibles forma** $x^2 + b$

- c)Agrupar los factores repetidos para que la función del denominador sea un producto de factores diferentes de la forma

$(ax + b)^n (ax^2 + bx + c)^m$ donde los números **m** y **n** ≥ 1

- d)Colocar la fracción con los términos factorizados

Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.
Efrén Giraldo T.

Resolver $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$ Multiplicar por el mcm $(x^2+1)^2$ y simplificar

Entonces: $2x^2+3=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D=Ax^2+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$

Donde: $A=0, B=2, (A+C)=0, (B+D)=3$. Luego: $A=0, B=2, C=0, D=1$ y

$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$

(Sectormatematica, 2011)

Cuarto Caso. Factores de segundo grado repetidos.

Sea la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2}$

Esta función racional puede ser llevada a otra equivalente dependiendo del divisor $Q(x) \neq 0$ de la misma, de tal modo que el divisor presenta dos factores de segundo grado repetidos $(x^2+9)(x^2+9)$.

A partir de la fracción dada $\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2}$ podemos construir dos fracciones cuya suma

sea equivalente a la fracción conocida : $\frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$

Es decir: $\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$

Multiplicando la ecuación anterior por el mínimo común múltiplo $(x^2+9)^2$ tenemos:

$$x^2 - x + 9 = (Ax+B)(x^2+9) + Cx + D$$

$$x^2 - x + 9 = Ax^3 + 9Ax + Bx^2 + 9B + Cx + D$$

Completando el polinomio de tercer grado en la derecha y factorizando los términos semejantes a la izquierda:

$$0x^3 + x^2 - x + 9 = Ax^3 + Bx^2 + (9A + C)x + (9B + D)$$

http://www.slideshare.net/rosacdepena/fracciones-parciales

Igualando términos semejantes.

En x^3: $0x^3 = Ax^3$ $\rightarrow$ **A = 0**

En x^2 : $x^2 = Bx^2$ $\rightarrow$ **B = 1**

En x : $-x = (9A + C)x$ $\rightarrow$ -1= 9 A + C $\rightarrow$ -1 = 9(0) + C $\rightarrow$ **C = -1**

Términos independientes: 9 = 9B + D $\rightarrow$ 9 = 9(1) + D $\rightarrow$ **D = 0**

En la expresión: $$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+9} + \frac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$$

Sustituyendo A, B, C y D tenemos:

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{(0)x+1}{x^2+9} + \frac{(-1)x+0}{(x^2+9)^2}$$

Efectuando la operación en la expresión de la derecha nos queda:

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{x^2+9} + \frac{-x}{(x^2+9)^2}$$

La suma de las dos fracciones de la derecha son equivalentes a la fracción inicial conocida.

http://www.slideshare.net/rosacdepena/fracciones-parciales

Efrén Giraldo T.

Ejemplo Caso IV

Sea $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^3(x^2+4)^2}$

usamos el Caso II y el Caso IV y nos queda

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+4} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

Efrén Giraldo T.

Terminar…

(Wikimatematica,2011)

MATEMÁTICAS ESPECIALES. ITM   Docente: Martha Guzmán.
Página # **2** de 6

Si **Q(x)** tiene un factor cuadrático de la forma $(ax^2 + bx + c)$ irreductible en los reales que se repite ***k*** veces, entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)$ /**Q(x)**, contiene términos de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2+bx+c)^1} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Donde A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_k, B_k, son las constantes a determinar.

EJEMPLO: $$\frac{x^2 - x + 1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{\mathbf{A_1}x + \mathbf{B_1}}{(x^2+2x+2)^1} + \frac{\mathbf{A_2}x + \mathbf{B_2}}{(x^2+2x+2)^2};$$ Donde **A_1, B_1, A_2, B_2** son las constantes a determinar.

- Y seguir….

- http://es.scribd.com/doc/6075394/DescomposiciOn-Fracciones-Parciales

BIBLIOGRAFIA

- Sector matemática
- http://www.google.com.co/#pq=fracciones+parciales&hl=es&cp=21&gs_id=4&xhr=t&q=fracciones+parciales+ejercicios&pf=p&sclient=psy-ab&source=hp&pbx=1&oq=fracciones+parciales+&aq=0e&aqi=g-e2g2&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=cf.osb&fp=a6e52451290f6c4c&biw=1280&bih=816
- Wikimatematica:

http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Fracciones_parciales

- http://es.scribd.com/doc/6075394/DescomposiciOn-Fracciones-Parciales
- http://www.slideshare.net/rosacdepena/fracciones-parciales