

## 12. DIVISIÓN DE POLINOMIOS.

- **División de monomios.**– Se dividen los coeficientes y se dividen las partes literales, siguiendo las reglas de las potencias.

Ej:  $(10x^2y^3) : (5x^2y) = 2y^2$

- **División de un polinomio entre un monomio.**– Se divide cada término del polinomio entre el monomio.

Ej:  $(30x^4 - 12x^3 + 6x^2) : (6x^2) = 5x^2 - 2x + 1$

- **Extracción de factor común.**– El factor común de un polinomio es un monomio, cuyo coeficiente es el máximo común divisor de los coeficiente de cada término, y cuya parte literal está compuesta por las letras que aparecen en todos los términos, elevadas al menor exponente con el que aparecen.

Sacar factor común consiste en expresar el factor común multiplicado por el polinomio que resulta de dividir el polinomio inicial entre el factor común.

Ej:  $36x^2y + 12x^3y^2z - 4xy + 16x^4yz^2 = 4xy \cdot (9x + 3x^2yz - 1 + 4x^3z^2)$

- **División de un polinomio entre un polinomio.**– Se ordenan el polinomio dividendo y el polinomio divisor de mayor a menor grado. Después, se sigue una sucesión de los siguientes pasos:

- Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor. El resultado se pone en el cociente.
- Se multiplica el resultado de la división anterior por todo el polinomio divisor. El resultado se escribe debajo del dividendo, cambiado de signo.
- Se obtiene el resto, sumando el dividendo con el polinomio que hemos escrito debajo.
- La división termina cuando el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Ej:

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad -2x^2 + 3x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2x \\ \hline x^2 - 2x + 2 \end{array} \right. \\
 \hline
 -x^4 - 2x^3 \\
 \hline
 -2x^3 - 2x^2 + 3x + 4 \\
 \quad 2x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 \quad \quad 2x^2 + 3x + 4 \\
 \quad \quad -2x^2 - 4x \\
 \hline
 \quad \quad \quad -x + 4
 \end{array}$$

Cociente:  $x^2 - 2x + 2$ ; Resto:  $-x + 4$

- **Regla de Ruffini.**– Se puede aplicar cuando el divisor es un binomio de primer grado. Es decir, para divisiones del tipo  $P(x) : (x - a)$ .

Este procedimiento emplea sólo los coeficientes del polinomio dividendo y del binomio divisor.

Ej:  $(x^4 - 3x^2 + 2):(x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 56 \end{array}$$

Cociente:  $x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ . Resto: 56.

- **Teorema del resto.**– El resto de la división de un polinomio  $P(x)$  entre  $(x - a)$  es igual al valor numérico de  $P(x)$  para  $x = a$ .

- **Ceros o raíces de un polinomio.**– Son los valores para los que el valor numérico del polinomio es cero.

Las raíces enteras de un polinomio deben ser divisores de su término independiente.

Si el polinomio dividendo es  $P(x)$ , entonces las raíces racionales de  $P(x)$  son de la forma  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  es un divisor del término independiente de  $P(x)$  y  $q$  es un divisor del coeficiente del término de mayor grado de  $P(x)$ .

- **Factorización de un polinomio  $P(x)$ .**– Se sigue el siguiente procedimiento:

- Si no tiene término independiente, se extrae factor común.

- Si alguno de los coeficientes de  $P(x)$  es fraccionario, se multiplica todo el polinomio por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los coeficientes,  $m$ , obteniéndose:

$$m \cdot P(x) = Q(x) \Rightarrow P(x) = \frac{1}{m} \cdot Q(x)$$

- Se anotan los posibles ceros de  $Q(x)$ .

- Se aplica la regla de Ruffini a los posibles ceros de  $Q(x)$ . Aquéllas con las que se obtiene resto 0 son raíces de  $Q(x)$ . Aquéllas con las que el resto es distinto de 0, se descartan.

- Finalmente,  $P(x) = \frac{1}{m} \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$ , siendo  $a_1, a_2, \dots, a_n$  los ceros de  $Q(x)$ .

- Si al principio se extrajo factor común porque  $P(x)$  no tenía término independiente, dicho factor común debe añadirse al resultado final, multiplicando a los demás factores.

- Cuando en la descomposición de  $Q(x)$  se obtiene un polinomio de segundo grado, en vez de seguir aplicando la regla de Ruffini, se puede igualar a cero y resolver la correspondiente ecuación. Las soluciones son ceros de  $Q(x)$ .

- **Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios.**– Se descomponen los polinomios. El M.C.D. es el producto de los factores comunes a todos los polinomios elevados al menor exponente, y el mínimo común múltiplo son las factores no comunes y los comunes elevados al mayor exponente.

**1.** Efectúa las siguientes divisiones. Expresa los resultados sin que aparezcan exponentes negativos.

a)  $\frac{60x^3}{12x^2}$

b)  $(15x^4y^3z) : (5x^2y^2z)$

c)  $(-25x^3) : (15x^5)$

d)  $(12x^3 - 18x^4 - 6x^5 + 24x^6 - 30x^7) : (6x^2)$

e)  $\left(\frac{3}{5}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{1}{2}x\right) : \left(\frac{3}{2}x\right)$

f)  $\left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{5}x\right) : \left(\frac{4}{3}x^2\right)$

**2.** Sacar factor común en los siguientes polinomios:

a)  $12x^5 - 3x^4 + 18x^3 - 21x^2$

c)  $-36x^5y - 8x^2y^2 - 12x^3y^4 - 16x^3y^3$

b)  $36x^3 - 6x^2 + 132x^4 - 24x^7 + 48$

**3.** Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios.

a)  $(12x^2 - 29x + 15) : (3x - 5)$

b)  $(x^4 - x^3 + x^2 - x) : (x^2 + 1)$

c)  $(x^2 + 5x - 1) : (3x - 2)$

d)  $(8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 6x - 1) : (x^3 + 3x - 1)$

e)  $(-2x^3 - 10x^2 + x^4 - 10x - 6) : (x^2 - 5x + 1)$

f)  $\left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 6x + 7\right) : (x^2 - 5)$

g)  $\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + 21x^2 + x + 12\right) : \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right)$

h)  $\left(2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 3x + \frac{1}{6}\right) : \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right)$

**4.** Determina el polinomio cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios empleando la regla de Ruffini.

a)  $(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

b)  $(x^4 - 2x^2 + 3x^3 - 1) : (x + 2)$

c)  $(x^5 + 1) : (x + 3)$

d)  $(x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 4x^2 + 5x + 1) : (x - 1)$

e)  $(x^4 - 2x^2 + 3) : (x + 3)$

f)  $(x^4 + \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{2}) : (x - \sqrt{6})$

**5.** Indica si las siguientes divisiones son exactas:

a)  $(x^4 + 1) : (x - 1)$

e)  $(9x^3 - 3x^2 - 7x - 2x + 12) : (x - 4)$

b)  $(x^4 - 1) : (x - 1)$

c)  $(x^3 + 6x - 5) : (x - 5)$

f)  $(x^2 - \frac{14}{5}x + 1) : (x + 2)$

d)  $(x^4 - y^4) : (x - y)$

**6.** Descompón en factores los siguientes polinomios:

a)  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

d)  $x^4 - 5x^2 + 4$

b)  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

e)  $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$

c)  $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

f)  $2x^2 - 10x + 12$

**7.** Halla el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes pares de polinomios:

a)  $(x - 2)^3 \cdot (x - 1)^2$   
 $(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^4 \cdot (x + 2)^2$

d)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$   
 $x^3 - 1$

b)  $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$   
 $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

e)  $x^3 - 5x^2 + \frac{13}{4}x + 3$   
 $8x^2 - 8x - 6$

c)  $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$   
 $x^3 - 7x - 6$

**8.** ¿Cuánto debe valer  $k$  para que el polinomio  $x^3 - 9x^2 + k \cdot x - 32$  sea divisible entre  $x - 4$ ?

**9.** ¿Cuánto deben valer  $m$  y  $n$  para que el polinomio  $x^3 + m \cdot x^2 + n \cdot x + 6$  sea divisible entre  $x + 3$  y entre  $x + 2$ ?