CLASES 15

MATEMÁTICA BÁSICA
NÚMEROS COMPLEJOS.
TEOREMA FUNDAMENTAL.

PROFESOR EFRÉN GIRALDO

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO

MEDELLÍN
ABRIL 2012

Números Complejos


¡SÍ, SE PUEDE!
LO HARÉ
PUEDO HACERLO
TRATARÉ DE HACERLO
¿ CÓMO HACERLO ?
QUIERO HACERLO
NO PUEDO HACERLO
NO LO HARÉ
©Curso Intensivo MIR Asturias

“Si te postran diez veces,
te levantas otras diez,
otras cien, otras quinientas;
no han de ser tus caídas
tan violentas ni tampoco,
por ley, han de ser tantas”.

Almafuerte

Objetivos - Competencias

- **Dominar las operaciones con números complejos.**
- **Manejar adecuadamente el teorema fundamental del álgebra.**

Elaboró Efrén Giraldo Toro

Los reales negativos no tienen raíces reales

- Si se tiene la ecuación x^2+16=0
- x^2=-16

  x= $\pm\sqrt{-16}$
- No tiene solución en los reales.

- Sin embargo, si es posible trabajar con un sistema más grande de números que incluyen también a los reales, llamados los **números complejos**, que si contienen soluciones a la raíz cuadrada de un número negativo. Lo veremos más adelante.

- Esto se hace creando un nuevo número, denominado **i** o unidad imaginaria **i** $=\sqrt{-1}$

i $=\sqrt{-1}$ elevando al cuadrado **i**^{2} **= -1**

- Toda expresión de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, recibe el nombre de Número Complejo.

- Se designan a los números complejos con la letra Z ; así $z = a + bi$

- Se llama PARTE REAL a la primera componente “a”.

- Se llama PARTE IMAGINARIA a la segunda componente “bi”.

- Si la parte real "**a**" es 0 se dice que el complejo bi es un Número Imaginario Puro.

- Si la parte imaginaria es 0 entonces es un número real común o sea que cualquier real se puede escribir como un complejo así: a +obi

- Un paréntesis…
- ¿Será **+5** igual a **-5?**
- Miremos la recta numérica
-
- -5 0 +5

- Están en dos posiciones diferentes, por tanto

-5 y +5 son dos números bien distintos, tanto es así que difieren es un valor de 10. Lo único en común es su valor absoluto es el mismo, pero esto es otro paseo. Tenga en cuenta esto para lo que viene.

Raíces de números positivos.

La raíces de un **número real positivo**, son dos números reales distintos tales que ***multiplicando cada uno por si mismo da el número real***.

- Estos dos números difieren solamente en el signo pero su valor absoluto es el mismo.

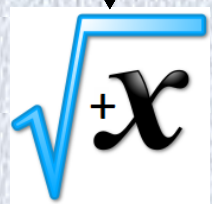
  Por ejemplo +25 tiene dos raíces que se expresan así:

  La raíces del número +25 ó $\pm\sqrt{25}$ son: **±5**

o sea +5 y -5, puesto que:

(+5)(+5)= 25 y (-5)(-5)= 25

Raíces de números positivos en los Reales



- Ya vimos anteriormente que cuando se tiene una raíz cuadrada, de un número positivo en general salen dos soluciones o raíces, una con signo + y otra con signo - o sea $\pm\sqrt{x}$

Raíces de números negativos en los Reales

- Las raíces de un **número negativo** no existen en el campo de los **reales**:
- Las supuestas raíces de -25 serían $\pm\sqrt{-25}$ pero acá viene el problema puesto que deberían existir dos números tales que multiplicados por si mismos den -25 y tales números en los reales no existen porque

+5 × +5 =25 y -5 × -5 = 25

Y se toma +5 × -5 no es el caso pues +5 y -5 no son los mismos números como vimos antes.

Raíces de números negativos en los complejos

Si $-r$ es un negativo sus raíces en los complejos serán:

$\pm\sqrt{-r} = \pm\sqrt{-1.r} = \pm\sqrt{-1}.\sqrt{r} = \pm\, \mathrm{i}\sqrt{r}$

Las raíces de *-r* son por tanto: $+\,\mathrm{i}\sqrt{r}$, $-\,\mathrm{i}\sqrt{r}$

$+\,\mathrm{i}\sqrt{r}$ se llama raíz cuadrada principal

Comprobemos: si $+\mathrm{i}\sqrt{r}$ es raíz de $-r$, *entonces* $+\mathrm{i}\sqrt{r}$ *multiplicada por si mismo debe dar* $-r$. *Veamos:*

$(+\,\mathrm{i}\sqrt{r})(+\,\mathrm{i}\sqrt{r}) = i^2\, r = -r$ *efectivamente es raíz de -r*

$(-\,\mathrm{i}\sqrt{r})(-\,\mathrm{i}\sqrt{r}) = i^2\, r = -r$ *También es raíz de -r*

La raíz positiva de:

$$\sqrt{-1} = i\sqrt{1}$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 * 4} = \sqrt{-1}\,\sqrt{4} = i2$$

-
  - x= $\pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{-1 * 16}$
  - $= \pm\sqrt{-1}\sqrt{16}$ = $\pm$i$\sqrt{16}$ $\pm$ i4

- En general la raíces de un número negativo –a ó $\sqrt{-a}$ se pueden colocar como $\pm$ i$\sqrt{a}$

La raíz cuadrada de un número negativo
es necesariamente imaginario o generalizando:

La raíz par (2, 4, 6, 8…) de un número negativo es siempre imaginaria

La ley de los radicales de la multiplicación para los imaginarios no se cumple

- Si a y b son ≥ 0 o sea positivos

$$\sqrt{a*b} = \sqrt{a}*\sqrt{b}$$

- $\sqrt{4*4} = \sqrt{4}\,\sqrt{4} = \sqrt{16} = 4$ se cumple

- Pero si a y b son < o o sea se trabaja con imaginarios, no se cumple:

$$\sqrt{-4} * \sqrt{-4} \# 4$$

$\sqrt{-4} * \sqrt{-4} = i\sqrt{4} * i\sqrt{4} = i^2\sqrt{4} = -2$ valor muy diferente

NOTA IMPORTANTE:

*Al multiplicar radicales con números negativos adentro, **siempre** se deben expresar primero en la forma $i\sqrt{r}$ siendo r positivo. Esto evita posibles errores.*

Recordar que

$$i=\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-a} = i\sqrt{a}, \quad i^2=-1$$

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{-4} = i\sqrt{2} \times i\sqrt{4} =$$

- Los complejos se suman, restan, multiplican y dividen de la misma manera que las expresiones de la forma $a + \sqrt{c}$. Se aplica la propiedad distributiva.

- Se debe tener en cuenta que

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{o} \quad i^2 = -1$$

- Dos números complejos son iguales si lo son cada una de sus partes.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

- Dos números son conjugados cuando tienen la misma parte real y partes imaginarias con signos contrarios. Se representa con una raya sobre la Z.

- Ej: $z = a + bi$ su conjugado es $\bar{z} = a - bi$

- Dos complejos son opuestos cuando lo son tanto la parte real como la imaginaria.

- Ej: $z = a + bi$ $-z = -a - bi$

- O sea cuando tienen signo contrario

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

$3 + 4i$	Parte real 3, parte imaginaria 4
$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$	Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$
$6i$	Parte real 0, parte imaginaria 6
-7	Parte real -7, parte imaginaria 0

Suma de complejos

- Para sumar complejos se suman algebraicamente entre sí **por separado sus partes reales y sus partes imaginarias**.
- Ej: Dados $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$
- Su suma es

$$Z1 + Z2 = (a + c) + (b + d)i$$

- **3(-2 – 4i) + 5(1/2 – i)= -6 -12i + 5/2 – 5i = -12/2 + 5/2 – 12i – 5i=**
- **-7/2 +17i**

Resta de complejos

- Para restar complejos, se restan las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí.
- Dados $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$
- $Z1 - Z2 = (a-c) + (b- d)i$
- O el primero más la suma del opuesto.

Multiplicación: se multiplican normalmente como binomios teniendo en cuenta que i^2=-1 o que i=$\sqrt{-1}$

- Dados $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, Hallar $z_1 * z_2$
- $z_1 * z_2 = (a + bi)(c + di) = a.c + a.di + bi.c + bi.di$

$ac + bi.di + a.di + bi.c = ac + bd\, i^2 + (ad + bc)i$

pero i^2**=-1**

$ac-bd + (ad+bc)i = (ac-bd) + (ad+bc)i$

$$(a + bi) \cdot (c+ di)= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

$$2(1+2i)\cdot(3-5i)= (2+4i)\cdot(3-5i)= 6-10i+12i-20i^2= 6-10i+12i+20=$$

$$=26+2i$$

Evalúe $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$ y exprese en la forma $a + bi$.

Solución

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{4}) \\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i) \\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2 \cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3}\end{aligned}$$

División de complejos

- Para dividir expresiones complejas, se expresa en forma de fracción y se racionaliza el denominador de la fracción, multiplicando ambos términos de la fracción por el conjugado del denominador

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{\left|z_2\right|^2}$$

- Dividir $3+5i$ entre $3-8i$

$$\frac{3+5i}{3-8i}$$

$$\frac{a+bi}{c^2+di^2}=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+(b\cdot c-a\cdot d)i}{c+d}$$

$$\frac{3+5i}{3-8i}=\frac{(3+5i)\cdot(3+8i)}{(3-8i)\cdot(3+8i)}=\frac{9+24i+15i+40i}{9+24i-24i-64i}=$$

$$=\frac{-31+39i}{73}$$

32

- Dividir los complejos siguientes

a) $\dfrac{3+5i}{1-2i}$ b) $\dfrac{7+3i}{4i}$

Solución Se multiplica tanto el numerador como el denominador por el conjugado complejo del denominador para hacer al nuevo denominador un número real.

a) El complejo conjugado de $1-2i$ es $\overline{1-2i} = 1+2i$.

$$\frac{3+5i}{1-2i} = \left(\frac{3+5i}{1-2i}\right)\left(\frac{1+2i}{1+2i}\right) = \frac{-7+11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

b) El complejo conjugado de $4i$ es $-4i$. Por lo tanto

$$\frac{7+3i}{4i} = \left(\frac{7+3i}{4i}\right)\left(\frac{-4i}{-4i}\right) = \frac{12-28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$

Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas

Ejemplo 6 **Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas**

Resuelva cada ecuación.

a) $x^2 + 9 = 0$ b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

Solución

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ significa $x^2 = -9$, por consiguiente

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

Las soluciones son por lo tanto $3i$ y $-3i$.

b) Por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{2(-2 \pm i)}{2} = -2 \pm i$$

Así, las soluciones son $-2 + i$ y $-2 - i$. ■

Ejemplo 7 **Complejos conjugados como soluciones de ecuaciones cuadráticas**

Demuestra que las soluciones de la ecuación

$$4x^2 - 24x + 37 = 0$$

son complejos conjugados el uno del otro.

Solución Se usa la fórmula cuadrática para obtener

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(4)(37)}}{2(4)}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{24 \pm 4i}{8} = 3 \pm \frac{1}{2}i$$

Así, las soluciones son $3 + \frac{1}{2}i$ y $3 - \frac{1}{2}i$, y éstos son complejos conjugados.

Multiplicidades

- Son los exponentes a los cuales aparecen los diferentes factores.

$$P(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x+3)^5$$

tiene los ceros siguientes:

1 (multiplicidad 3), -2 (multiplicidad 2), -3 (multiplicidad 5)

El polinomio P tiene el mismo número de ceros que su grado, tiene grado 10 y tiene 10 ceros, siempre y cuando se cuenten sus multiplicidades. Esto es cierto para todos los polinomios, según se demuestra en el siguiente teorema. Efrén Giraldo

- El grado total del polinomio es la suma de todos los exponentes= 3+2+5=10. P(x) es de grado 10

Teorema fundamental del álgebra

- Un polinomio en una variable, tiene tantas raíces, soluciones o ceros, como su grado.

- En otras palabras, dado un polinomio complejo P de grado *n*, la ecuación P(x) = 0 tiene exactamente *n* soluciones contando **tanto las reales como las complejas** y contando las que **se puedan repetir** con la misma base(multiplicidades).

Hallar las raíces factorizando apropiadamente

- **$3x^3 - 3x^2 - 18x =$**
- **$3x\ (x^2 - x - 6) = 3x\ (x - 3)(\ x + 2)$**
- **Raíces: 0,3,-2**

El 0 es raíz por (x-o)

- Para hallar todos lo ceros, raíces o soluciones de un polinomio se factoriza hasta donde se pueda.
- Luego se hallan las raíces restantes de la ecuación cuadrática restante

Ejemplo 1 Factorización completa de un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

a) Encuentre los ceros de P.

b) Halle la factorización completa de P.

Solución

a) Se factoriza primero P como sigue.

$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$	Dado
$= x^2(x - 3) + (x - 3)$	Términos agrupados
$= (x - 3)(x^2 + 1)$	Factor $x - 3$

Se encuentran los ceros de P al igualar a cero cada factor 0:

$$P(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$$

Al hacer que $x - 3 = 0$, se ve que $x = 3$ es un cero.

Con $x^2 + 1 = 0$, tiene $x^2 = -1$ $X = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Por tanto los ceros, raíces o soluciones de P(x) son 3, i,-i

Y los factores serán por tanto:

(x-3)(x-i)(x+i)

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3. = (x-3)(x-i)(x+i)$$

Cuadráticos reductibles en los reales

- $x^2 - b = 0$ es siempre reductible en los reales

Efrén Giraldo

$$x^2 - b = 0 \qquad x^2 = b$$

$$x^2 - 5 = 0 \qquad x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5}$$
$$x = -\sqrt{5}$$

Factores cuadráticos irreductibles en los reales

$$x^2 + b$$

- Un factor cuadrático se llama irreductible(en los reales), si al tratar de reducirlo más cae en los complejos. Tal es el caso de factores de la forma $x^2 + b = 0$ (b≥0 o sea positivo).

$x^2 = -b$ $x = \pm\sqrt{-b}$ es un complejo

- $x^2 + 5 = 0$ $x = \pm\sqrt{-5} = \pm\, i\sqrt{5}$

Teorema de los factores lineales y cuadráticos

- Todo polinomio que tenga coeficientes reales, se puede factorizar en productos de factores lineales(x ± a) y cuadráticos irreductibles $(x^2 + b)$ con a y b reales positivos

- Si se quisiera seguir factorizando los términos cuadráticos $(x^2 + b)$ ya aparecerían complejos

Ejemplo 8 **Factorización de un polinomio en factores lineales y cuadráticos**

Sea $P(x) = x^4 + 2x^2 - 8$.

a) Factorice a P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

b) Factorice a P por completo en factores lineales con coeficientes complejos.

Solución

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^2 - 8 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \end{aligned}$$

El factor $x^2 + 4$ es irreducible puesto que sólo tiene los ceros imaginarios $\pm 2i$.

b) Para obtener la factorización completa, se factoriza el factor cuadrático restante.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$ ■

IMPORTANTE

- LUEGO DE ESTA **CLASE** UD. AMIGO ESTUDIANTE, **TIENE QUE DOMINAR** TODOS LOS CONCEPTOS PROFUNDAMENTE. DE LO CONTRARIO VUELVA REPASE, ESTUDIE, CONSULTE.

- SI NO LO HACE COMIENZA A TENER PROBLEMAS ES SU MATERIA Y ESTÁ DANDO OTRO PASO PARA PERDERLA Y POSIBLEMENTE PERDER TAMBIÉN SU CARRERA.

Elaboró Efrén Giraldo

46

Bibliografía

•http://fcm.ens.uabc.mx/~chelo/precalculo/10-raic-polinom/l10-3.htm
•Stewart. (2007). Precálculo
9/28/