MATEMÁTICA BÁSICA CLASE 20-21

SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS

PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITAN0

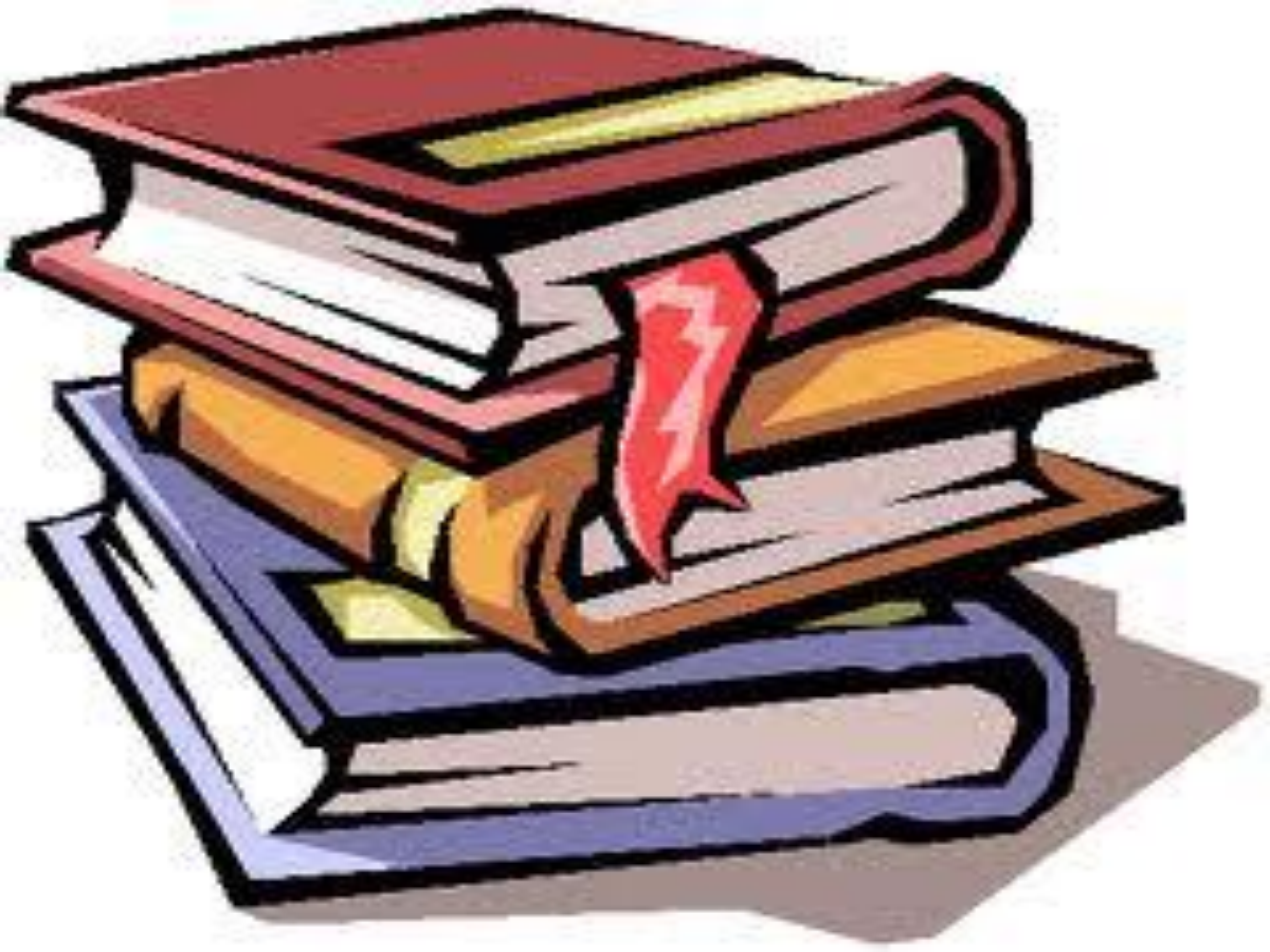
MEDELLÍN MAYO 2012

“EL MIEDO LLAMÓ A LA PUERTA,
LA CONFIANZA ABRIÓ
Y AFUERA HABÍA NADIE”.

“EL MIEDO LLAMÓ A LA PUERTA,
LA DESCONFIANZA ABRIÓ
Y EL MOSTRUO LO DESRUYÓ”

- Una persona usualmente se convierte en aquello que cree que es. **Si sigo diciéndome a mi mismo que no puedo hacer algo, es muy posible que termine siendo incapaz de hacerlo.**

- Por el contrario **si tengo la creencia que sí puedo hacerlo, con seguridad adquiriré la capacidad de realizarlo aunque no la haya tenido al principio**. (Gandhi)



- **NO TE DEJES VENCER POR LOS MOSTRUOS DE LA DESCONFIANZA, EL MIEDO Y LA PEREZA.**

OBJETIVOS

- **DOMINAR SISTEMAS DE DOS Y TRES ECUACIONES SIMULTANEAS POR DIFERENTES MÉTODOS**

SISTEMAS DE ECUACIONES

- **Hasta ahora se ha trabajado en general con ecuaciones de una sola variable. Una variable describe un solo comportamiento de una situación dada.**
- **Pero una variable no es suficiente en muchas ocaciones para describir o modelar las situaciones complejas del mundo real.**
- Efrén Giraldo Toro
- **Así: la vida de una máquina depende del material del que está hecha, de su manejo adecuado, del tiempo de uso y de otros factores.**
- **La salud depende de una buena alimentación, de un ambiente apropiado, y de otros factores también.**

- **Por tanto los sistemas reales dependen de muchas variables o condiciones. Y para eso se desarrollaron las ecuaciones simultaneas.**
- **Un** *<u>sistema de ecuaciones</u>* **es un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen las mismas variables y trabajan conjuntamente o simultanamente. O sea, que coinciden en algunos valores de sus variables. Estos valores se llaman la solución del sistema**

Ejemplos de ecuaciones con dos incógnitas

1) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

Efrén Giraldo Toro

2) $\begin{cases} x^2 - y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Efrén Giraldo Toro

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}y = 10 \\ \dfrac{3}{4}x - y = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

(Hernández, 2011).

- **Una solución de una ecuación, son los valores de cada una de las variables que hacen que cada ecuación del sistema se cumpla.**

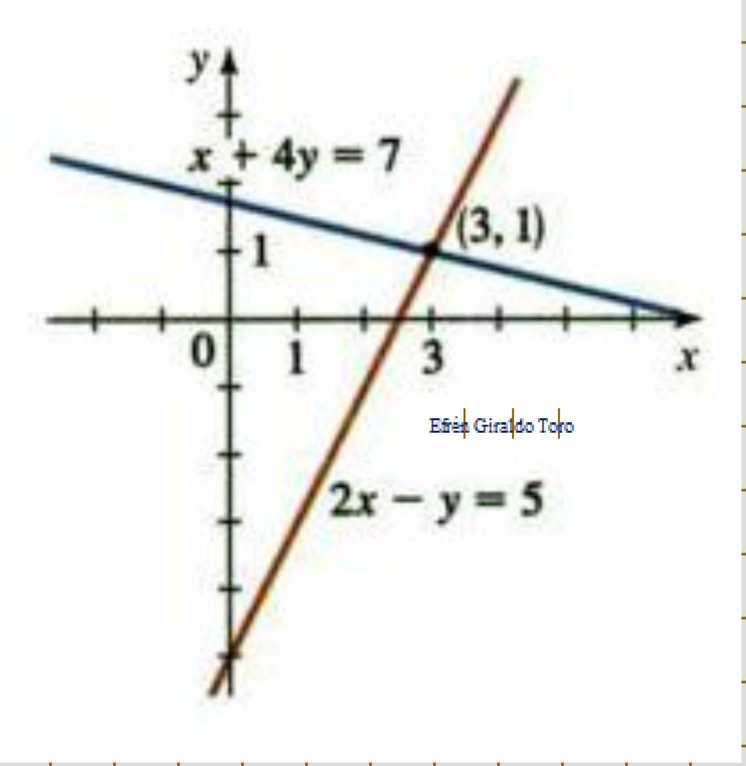
- **Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar las soluciones o valores del sistema**
- **Una solución es un par ordenado (x, y) que satisface cada una de las ecuaciones del sistema.**

- **La solución gráfica es el punto de intersección de las 2 gráficas de las 2 ecuaciones**

- Un sistema se define como 2×2 si tiene 2 ecuaciones y 2 incógnitas

- 3×3 si tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas

- Y así sucesivamente…



- El punto (3,1) es la intersección de las 2 rectas x+4y=7 y 2x-y=5 por tanto es la solución de las 2 ecuaciones correspondientes

(Stewart,2007)

Definición

Una solución de un sistema 2x2 es un par ordenado *(x,y)* que hace cierta cada una de las 2 ecuaciónes del sistema.

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en encontrar el conjunto de todas las soluciones del sistema. El conjunto formado por todas las soluciones de un sistema de ecuaciones se conoce como el conjunto solución del sistema.

- Un sistema lineal puede no tener solución si las rectas son paralelas(no tienen punto en común)

- Puede tener infinitas soluciones. ***El sistema se llama indeterminado o dependiente***. Esto ocurre cuando las ecuaciones o rectas terminan siendo las mismas.

- O una solución cuando se interceptan en un punto cuyas coordenadas corresponden a la solución del sistema. Un sistema que tiene solución única, se llama ***sistema determinado, compatible, consistente o independiente.***

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

COMPATIBLE

Determinado: solución única.

COMPATIBLE

Indeterminado : infinitas soluciones.

INCOMPATIBLE

CONJUNTO SOLUCIÓN VACIO

(UPC, 2011)

Verificar si cada par ordenado es una solución del sistema de ecuaciones correspondiente. Es reemplazar en cada ecuación los valores de x y y y ver si cumplen cada ecuación.

1) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

$\boxed{\text{Par Ordenado}: (1, 2)}$

$\underline{\mathit{Verificación}:}$

$2(1) + 2 \neq 6$

$3(1) - 2 \neq 4$

no satisface ninguna ecuación

Por lo tanto el par ordenado $(1\,,\,2)$ no es solución.

(Hernández, 2011).

Par Ordenado: $(-1\ ,\ 6)$

2) $\begin{cases} x^2 - y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Efrén Giraldo Toro

Efrén Giraldo Toro

$\underline{Verificación:}$

Efrén Giraldo Toro

$(-1)^2 - 6 = -5$

Efrén Giraldo Toro

- $2(-1) + 6 = 4$ satisface las dos ecuacuiones

Por lo tanto el par ordenado $(-1\ ,\ 6)$ *es solución.*

(Hernández, 2011).

Métodos de resolución de ecuaciones simultaneas

- Por el método de sustitución

- Por el método de eliminación

- Por determinantes

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN PARA SISTEMAS 2X2

PROCEDIMIENTO

1. Despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones.

2. Sustituir la variable obtenida en la otra ecuación. Esto deja la ecuación con una sola variable y despejando esa variable se obtiene su valor.

3. Sustituir el valor de la variable del paso anterior en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplos:

Resolver por el *método de sustitución.*

1) $$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Escogiendo la ecuación, $2x + y = 6$,

$$y = 6 - 2x$$

Sustituyendo y en la otra ecuación tenemos,

$$3x - (6 - 2x) = 4$$

$$3x - 6 + 2x = 4$$

$$\boxed{x = 2}$$

(Hernández, 2011).

Sustituyendo el valor de x obtenido en la primera ecuación tenemos

$$y = 6 - 2(2) = 2$$

$$\boxed{Conjunto\ Solución = \{(2\ ,2)\}}$$

Método de Eliminación por Adición.

Este método es importante porque en el se basa el Método de Gauss para sistemas múltiples de ecuaciones.

Efrén Giraldo Toro

Efrén Giraldo Toro

Consiste en arreglar las ecuaciones de tal manera que se puedan sumar o restar con el objetivo que se vaya eliminando una de las variables.

Efrén Giraldo Toro

Efrén Giraldo Toro

Procedimiento:

1. Igualar los coeficientes de una de las variables multiplicando las ecuaciones por los números correspondientes de tal manera que se elimine una de las variables.

2. Sumar o restar las ecuaciones para eliminar la variable.

3. Repetir el proceso para la otra variable. Este paso se puede reemplazar por una sustitución.

$$1)\quad \begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 obtenemos,

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -2x-4y=-10 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones obtenemos,

$$\begin{array}{r} 2x-3y=3 \\ -\,2x-4y=-10 \\ \hline \cancel{0x}-7y=-7 \end{array}$$

(Hernández, 2011).

$$-7y = -7 \qquad \boxed{y = 1}$$

Ahora puedo reemplazar este valor en cualquiera de las ecuaciones y obtener X o seguir con el método de eliminación para salir de y

Multiplicando la segunda ecuación por -3 y la primera por 2 obtenemos,

$$\begin{cases} 2(2x - 3y = 3) \\ 3(x + 2y = 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x - 6y = 6 \\ 3x + 6y = 15 \end{array}$$

(Hernández, 2011).

Sumando las ecuaciones obtenemos,

$$4x - 6y = 6$$

$$\underline{3x + 6y = 15}$$

$$7x + \cancel{0y} = 21$$

(Hernández, 2011).

$$7x = 21 \qquad x = 3$$

$$\boxed{C.S. = \{(3,\ 1)\}}$$

El sistema es consistente independiente.

Observación:

Para encontrar el valor de la segunda variable se puede usar el método de sustitución.

Sustituyendo $y = 1$ en la ecuación, $x + 2y = 5$

$$x + 2(1) = 5 \qquad x = 3$$

(Hernández, 2011).

$$2)\ \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 6 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 obtenemos,

$$\begin{cases} 2(2x - 3y = 3) \\ -4x + 6y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4x - 6y = 6 \\ -4x + 6y = 6 \end{matrix}$$

Sumando las ecuaciones obtenemos,

$$\begin{array}{r} 4x - 6y = 6 \\ -4x + 6y = 6 \\ \hline 0x + 0y = 12 \end{array}$$

$$0 = 12$$ Falso

$$\boxed{C.S. = \varnothing}$$

El sistema es inconsistente.
No tiene soluciones.

(Hernández, 2011).

$$3)\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -4x+6y=-6 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 obtenemos,

$$\begin{cases} 2(2x-3y=3) \\ -4x+6y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4x-6y=6 \\ -4x+6y=-6 \end{matrix}$$

(Hernández, 2011).

- Si despejamos y en ambas ecuaciones vemos que da lo mismo

- $y = \frac{2}{3}x - 1$ por tanto es una sola ecuación.
- Y como es una sola ecuación con dos incógnitas toca suponer un valor de una las

ariable y despejar la otra, y así sucesivamente. Por tanto hay infinitas soluciones.

-

El sistema es dependiente.
Tiene infinitas soluciones.

(Hernández, 2011).

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones a fin de eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & 4 \times \text{ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & 3 \times \text{ecuación 2} \end{cases}$$

(Stewart,2007)

Se puede observar que las dos ecuaciones en el sistema original son simplemente modos distintos de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta son una solución del sistema. Al escribir la ecuación en la forma de ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Entonces, si t representa cualquier número real, se puede escribir la solución como

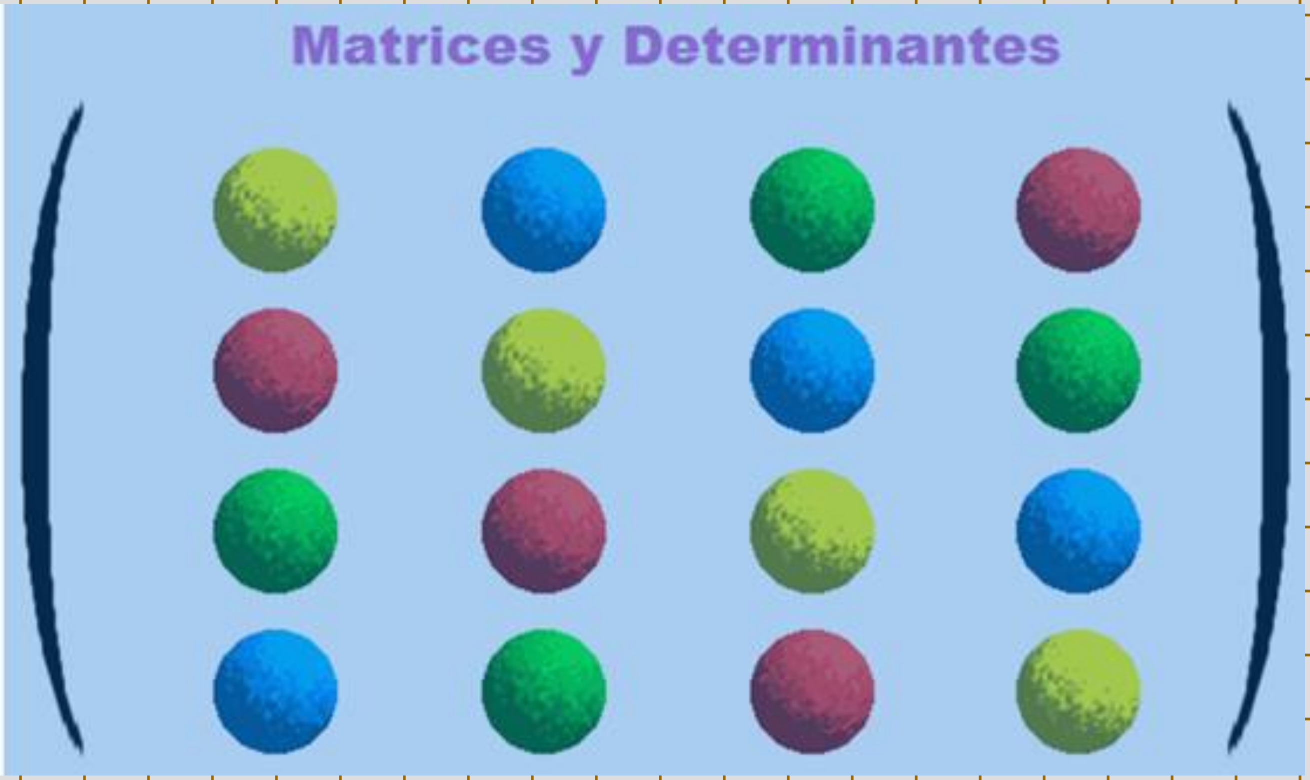
Asimismo, se puede escribir la solución en la forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones (véase la figura 4). ■

En el ejemplo 3, para llegar a soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, se obtiene la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Si $t = 4$, se obtiene la solución $(4, 0)$. Para cada valor de t tenemos una solución diferente. (Véase la figura 4.)

((Stewart,2007))


Matrices y Determinantes

MATRICES

- Una **matriz** es una tabla cuadrada o rectangular de datos ordenados en **renglones** o **filas horizontales** y **columnas** verticales. Si m son los renglones y n las columnas se le denomina matriz de orden ($m \times n$), y a m y n **dimensiones** de la matriz.

- Dos matrices se dice que son iguales si son del mismo orden y tienen los mismos elementos.

- Las matrices se denotan con letras mayúsculas, y las correspondientes letras en minúsculas denotan a los elementos de las mismas.

- Así, una matriz $\mathbf{A}_{i,j}$ indica que tiene i renglones y j columnas. Un elemento $a_{\mathrm{i,j}}$ indica que ese elemento se encuentra en la el reglón i y en la columna j, $a_{2,3}$ es un elemento que está en el renglón 2 y en la columna 3

- El determinante de una matriz es un número asociado con esa matriz y se halla mediante ciertas operaciones específicas.

SISTEMAS DE CRAMER

Sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:

- El **número de ecuaciones** es igual al **número de incógnitas**. O sea, sistemas donde el número de filas es igual a número de columnas m.m

- El **determinante** de la matriz de los coeficientes es **distinto de cero**.

MANERA DE HALLAR DETERMINANTES DE UNA ECUACIÓN 2×2

1. **Primero se organizan muy bien las ecuaciones de tal manera que las x estén debajo de las x, las y debajo de las *y* (y de la z si es 3.3) y los términos independientes deben ir al lado derecho del signo igual.**

2. **Se toman sólo los coeficientes de la x y de la y(y de la z si es 3.3) con sus respectivos signos y se colocan en el mismo lugar que ocupaban en las ecuaciones originales. Se encierran todos los coeficientes entre dos corchetes verticales. Esta es la matriz que corresponde a las ecuaciones dadas.**

MANERA DE HALLAR DETERMINANTES DE UNA ECUACIÓN 2×2

1. **El determinante general es sencillamente los valores de la matriz encerrados entre barras.**
2. **El valor del determinante general de la ecuación o simplemente el determinante se halla así:**

MATRICES 2.2 Y SUS DETERMINATES

(1) $\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$ Términos independientes

(2) MATRIZ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(3) Determinante General de la Ecuación $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Efrén Giraldo Toro

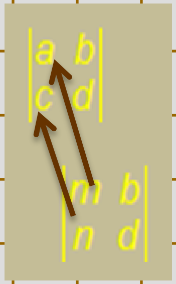
Efrén Giraldo Toro

(4) Valor del determinante general $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

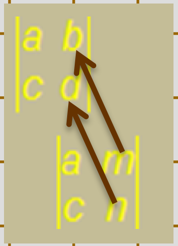
(Benítez , 2011)

- Determinantes de la x Dx, de la y Dy

- Para hallar el determinante asociado a x   Dx se procede así:
- Se toma el determinante general, se reemplazan los respectivos valores de x por los respectivos términos independientes

- Lo mismo se hace con Dy en las respectivas posiciones
- 

$$D_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$$

- 

$$D_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$$

- Y la solución se obtiene así:

Efrén Giraldo Toro

$$x = \frac{D_x}{\text{Determinante general}} = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{(md-nb)}{(ad-cb)}$$

Efrén Giraldo Toro

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{(an-cm)}{(ad-cb)}$$

Efrén Giraldo Toro

Ejemplo Resolver por determinantes el sistema $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(2)-(1)(-2)}{(1)(2)-(3)(-2)} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(1)-(3)(3)}{(1)(2)-(3)(-2)} = \frac{-8}{8} = -1$$

Ejemplo 6 Resolver por determinantes el sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$

Solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{28}{7} = 4, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{7}{7} = 1$$

(Benítez , 2011)

SISTEMAS TRINGUALARES O ESCALONADOS

- **Son sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. La primera ecuación tiene tres incógnitas, la segunda dos y la tercera una sola. Su solución es muy sencilla.**

- $x - 2y - z = 2 \quad (1)$
- $y + 2z = 5 \quad (2)$
- $z = 1 \quad (3)$

- Se comienzan resolviendo obviamente de la más inferior hasta la más superior.
- Por tanto se reemplaza el valor de la z en la en la ecuación (2) y se obtiene la y
- Luego se remplazan los valores hallados en la ecuación (1) y se obtiene x

$y + 2z = 5$ se arranca con (2) →

$y + 2\times1 = 5$ reemplazar el valor z= 1

$y = 3$

$x - 2y - z = 2$ (1) reemplazar z=1 y=3

$x - 2\times3 - 1 = 2$ $x = 2+7 = 9$

Por tanto la solución es (1,3,9)

- Otro ejemplo
- $x + y + \quad z = \;\; 3$

Efrén Giraldo Toro

$$y + 2\,z = -1$$

$$z = -1$$

- Si vamos a la 3ª ecuación, tenemos que
- $z = -1$.

Efrén Giraldo Toro

- Sustituyendo su valor en la 2ª obtenemos

$y = 1$.

Efrén Giraldo Toro

- Y sustituyendo en la 1ª los valores anteriores tenemos que $x = 3$.

http://www.vitutor.com/algebra/sistemas%20I/esc.html

Sistemas no triangulares

- Se trata de llevarlos a sistemas triangulares

¿De los 2 sistemas, cuál es más fácil de resolver?

$$\begin{cases} 2x - y + z = 9 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y + 2z &= -1 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

El método de eliminación de Gauss convierte un sistema normal en uno escalonado

Este método permite:

1- Multiplicar todos los términos de una ecuación por un # distinto de cero.

2- Sumar o restar a una ecuación un múltiplo de otra y obtener una ecuación equivalente que se incorpora al sistema.

3- Intercambiar de lugar dos ecuaciones.

Las 3 transformaciones elementales anteriores, pueden efectuarse sobre **cualquier sistema de ecuaciones lineales.**

- Para transformar el sistema en uno que sea escalonado se combinarán las ecuaciones entre sí (sumándolas, restándolas, o multiplicándolas por un número , etc.)

PROCEDIMIENTO

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{Queremos conseguir esto}} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 0 + ?y + ?z = ? \\ 0 + 0 + ?z = ? \end{cases}$$

➤ **1. La 1ª ecuación siempre se deja igual , (se escoge cualquiera procurando que esta sea la más sencilla).**

- **2. Suprimir la x de la segunda ecuación, combinándola con la primera**.

Multiplicar por (-3) la primera y sumar la segunda

De esta manera se elimina la x

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \end{array}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a\,(-3) \\ 2^a \end{array}\begin{cases} \cancel{-3x}-6y+9z=48 \\ \cancel{3x}+y-2z=-10 \end{cases} \xrightarrow[\text{2ª ecuación transformada}]{\text{1ª + 2ª para obtener la}} \boxed{0x-5y+7z=38}$$

- 3.Suprimir la x de la tercera ecuación combinándola con la primera. Multiplicar la primera por(-2) y le sumamos la tercera.

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \end{array}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a\,(-2) \\ 2^a \end{array}\begin{cases} \cancel{-2x}-4y+6z=32 \\ \cancel{2x}-3y+z=-4 \end{cases} \xrightarrow[\text{3ª ecuación transformada}]{\text{1ª + 3ª para obtener la}} \boxed{0x-7y+7z=28}$$

- 4.Escribir a partir de la primera ecuación las nuevas obtenidas

$$
\begin{array}{ll}
1^a & \\
2^a & \\
3^a &
\end{array}
\begin{cases}
x + 2y - 3z = -16 \\
0x - 5y + 7z = 38 \\
0x - 7y + 7z = 28
\end{cases}
$$

- 5.Eliminar la **y** de la 3 ecuación combinándola con la 2. Multiplicar la 2 por 7 y la 3 por(-5) esto hace que los términos en y se eliminen.

$$
\begin{array}{ll}
2^a & (7) \\
3^a & (-5)
\end{array}
\begin{cases}
-5y + 7z = 38 \\
-7y + 7z = 28
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
-35y + 49z = 266 \\
+35y - 35z = -140
\end{cases}
\rightarrow \boxed{14z = 126}
$$

- 6.De esta manera se obtiene la ecuación escalonada.

$$
\begin{array}{ll}
1^{a} & \\
2^{a} & \\
3^{a} &
\end{array}
\begin{cases}
x + 2y - 3z = -16 \\
0x - 5y + 7z = 38 \\
0x + 0y + 14z = 126
\end{cases}
$$

- Y la solución de esta es muy sencilla.

- Calculamos z en la 3ª ecuación. $14z = 126 \Rightarrow$ $\mathbf{z = 9}$

- Sustituimos z en la 2ª y calculamos la y. $-5y + 7(9) = 38 \Rightarrow$ $\mathbf{y = 5}$
- Sustituimos z e y en la 1ª para calcular la x. $x + 2(5) - 3(9) = -16 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 1}$

- Comprobamos las soluciones.

Sustituimos los valores obtenidos en el sistema original y vemos si se cumplen las 3 ecuaciones.

Ejemplo 3 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema siguiente.

Efrén Giraldo Toro

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + 2y - z = 6 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Efrén Giraldo Toro

Solución Para poner este sistema en forma triangular, se empieza por eliminar los términos en x de la segunda ecuación y de la tercera. (A partir de la primera.)

Efrén Giraldo Toro

Efrén Giraldo Toro

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \\ -2y + 3z = 4 & \text{Ecuación 2} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 & \end{cases}$$

Efrén Giraldo Toro

o

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \\ -2y + 3z = 4 & \\ -2y + 3z = 2 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

(Stewart,2007)

Ahora se elimina el término en y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ \quad -2y + 3z = 4 \\ \qquad\quad 0 = -2 \end{cases}$$

Ecuación 3 + (−1) × ecuación 2 = nueva ecuación 3

El sistema está ahora en forma triangular, pero la tercera ecuación establece que $0 = -2$, lo cual es falso. No importa qué valores asignemos a x, y y z, la tercera ecuación nunca será verdadera. Esto quiere decir que el sistema *no tiene solución.* ■

- Resumiendo:
- 1. Se escoge una de las tres ecuaciones y se obtiene la primera ecuación definitiva.
- 2. Se toma la primera y la segunda y se elimina la x. De esta sale la segunda nueva ecuación en y y z definitiva
- 3. Se escoge la primera y la tercera y se elimina la x. De esta sale la tercera ecuación en y y en z.
- 4. Se toma la segunda nueva ecuación y se trabaja con la tercera en y y z, se elimina la y se obtiene la nueva tercera ecuación en z.
- 5.Resolver el sistema escalonado obtenido.

MATRIZ 3.3
Determinante 3.3

	Incógnitas	Coeficientes	Tindependientes	Matriz
$2x - y + z = 6$	x	2 -1 1	6	
$x + 4y - 2z = 0$ $\Rightarrow$	y	1 4 -2	0	
$3x - 5y + z = 4$	z	3 -5 1	4	

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 6 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - 5y + z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinante general

http://www.vadenumeros.es/segundo/discusion-de-sistemas-rangos.htm

SISTEMAS 3.3 POR DETERMINANTES

1. Se halla el valor del determinante general del sistema de 3 ecuaciones, como se explica en las diapositivas siguientes
2. Se reduce a 2.2 por el método del cofactor, las líneas cruzadas o menores
3. Se halla Dx, Dy, Dz de la misma manera que para 2.2
4. Los valores de la x, y,z se hallan de la misma manera

Valor del determinante general por el Método del Factor, Líneas cruzadas o Menores

$$\text{Determinate general} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se toma siempre la línea del primer renglón y luego se va alternando con las líneas de cada columna. Las líneas se cruzan en el vértice superior izquierdo o sea en 1, este valor se llama cofactor. Tomo ese 1 y lo multiplico por el determinante de la matriz 2.2 que queda.

$$\begin{matrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

1(-2×1-3×0)=-2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Hago lo mismo con la segunda columna, pero al cofactor 1 de la mitad, le cambio de signo:-1(siempre al de la mitad se le cambia de signo.
- -1(1×1- 1×3) = 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tercer cofactor 1

$1(1\times 0-1\times(-2))=2$

Sumo los tres resultados anteriores

$-2+2+2 = 2$ por tanto:

El valor del determinante general es 2

- El determinante Dx, Dy, Dz se calcula en forma similar a como se halló para la matriz 2×2 o sea, a partir del determinante general de la matriz, reemplazando por los términos independientes en las respectivas posiciones de la x, y, z

$$\text{Determinate general} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

Determinate general = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

Determinante de la x $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21$

Determinante de la y $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8$

Determinante de la z $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$

- $x = \dfrac{Dx}{\text{Determinante general}}$

- $y = \dfrac{Dy}{\text{Determinante general}}$

- $z = \dfrac{Dz}{\text{Determinante general}} =$

$$x = \frac{21}{2} \qquad y = \frac{-8}{2} = -4 \qquad z = \frac{-11}{2}$$

1 Ejemplo de un sistema compatible determinado. Única solución.

$$\left.\begin{aligned} 5x-2y+6z&=-7\\ x+y+3z&=2\\ 2x+y&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Escribimos los coeficientes de la matriz A

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\textbf{A}}$$

Resolver : utilizamos la regla de Cramer

Para calcular el valor de las incógnitas, sustituimos la columna de la incógnita que sea por los valores de la columna de los términos independientes. Las otras columnas se quedan igual. Calculamos el valor del determinante correspondiente y lo dividimos entre el valor del determinante de A.

$$x=\frac{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} x & y & z\end{array}\\ \begin{vmatrix} -7 & -2 & 6\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\end{array}}{|A|}=\frac{33}{-33}=-1 \qquad y=\frac{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} x & y & z\end{array}\\ \begin{vmatrix} 5 & -7 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}\end{array}}{|A|}=\frac{-66}{-33}=2 \qquad z=\frac{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} x & y & z\end{array}\\ \begin{vmatrix} 5 & -2 & -7\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\end{array}}{|A|}=\frac{-11}{-33}=\frac{1}{3}$$

Solución : $x=-1,\ y=2,\ z=1/3$

http://www.vadenumeros.es/actividades/sistemas-regla-de-cramer.htm

Si en la lid tu destino te derriba,
Si todo en tu camino es cuesta arriba,
Si tu sonrisa es ansia insatisfecha,
Si hay faena excesiva y vil cosecha,
Si a tu caudal se contraponen diques
Date una tregua pero no claudiques..

Rudiard Kipling

Bibliografía

Benítez, R. (2011). Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Tomado el día 4 octubre de 2011 de :

http://www.google.com.co/search?sclient=psy-ab&hl=es&site=&source=hp&q=sistemas+de+ecuaciones+ppt&pbx=1&oq=sistemas+de+ecuaciones+ppt&aq=f&aqi=g1&aql=&gs_sm=s&gs_upl=188789l205205l0l207316l38l35l6l10l1l10l381l4847l0.3.13.4l35l0&biw=1262&bih=809&cad=cbv&sei=fQuLTvD0G8iitgeE1eiRAw

Hernández, E. (2011). Sistemas de Ecuaciones. Tomado el día 24 septiembre de 2011 de:

http://www.google.com.co/#hl=es&cp=26&gs_id=2g&xhr=t&q=ecuaciones+simultaneas+ppt&pf=p&sclient=psy-ab&rlz=1R2ADRA_esCO438&source=hp&pbx=1&oq=ecuaciones+simultaneas+ppt&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&fp=eb89634946306d34&biw=1280&bih=558

UPC. (2011). Sistema de ecuaciones lineales. Tomado el 4 octubre de 2011 de:

http://www.google.com.co/#hl=es&cp=24&gs_id=7&xhr=t&q=ecuaciones+3+incognitas++gauss+ppt&pq=ecuaciones+3+incognitas+por+gauss+ppt&pf=p&sclient=psy-ab&source=hp&pbx=1&oq=ecuaciones+3+incognitas++gauss+ppt&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&bav=cf.osb&fp=37c59e260aff557d&biw=1280&bih=598&bs=1

http://www.vitutor.com/algebra/sistemas%20I/cramer.html.

http://www.vadenumeros.es/actividades/sistemas-regla-de-cramer.htm Dirección Programa

Stewart. 2007. Precálculo