Textos Académicos

GEOMETRÍA ANALÍTICA

e introducción al Cálculo Vectorial

John Alexander Pérez Sepúlveda
Juan Guillermo Paniagua Castrillón

FONDO EDITORIAL ITM

GEOMETRÍA ANALÍTICA
E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

GEOMETRÍA ANALÍTICA E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

John Alexander Pérez Sepúlveda
Juan Guillermo Paniagua Castrillón

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

Pérez S., John Alexander
Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial / John Alexander Pérez S., Juan Guillermo Paniagua C.--1a ed. – Medellín : Instituto Tecnológico Metropolitano, 2016.
242 p. – (Textos académicos)

Incluye referencias bibliográficas
ISBN 978-958-8743-97-4

1. Geometría analítica 2. Vectores I. Paniagua C., Juan Guillermo II. Tít. III. Serie

516.3 SCDD 21 ed.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

Edición: diciembre 2016
Hechos todos los depósitos legales

AUTORES
John Alexander Pérez Sepúlveda
Juan Guillermo Paniagua Castrillón

Editado en Medellín, Colombia
Fondo Editorial ITM
Calle 73 No. 76 A 354 (vía El Volador)
Tel: (574) 440 5197 - 440 5246
http://fondoeditorial.itm.edu.co/
www.itm.edu.co

Indice general

Introducción

La geometría analítica es una rama de la matemática que estudia las figuras geométricas, a través de herramientas básicas del análisis matemático y del álgebra. Los problemas geométricos allí planteados son estudiados y solucionados mediante la asociación de ecuaciones y curvas, en un sistema coordenado.

El contenido del libro ha sido organizado y estructurado en ocho capítulos, en función de lograr una buena aprehensión e integración de los conceptos, de tal manera que el estudiante adquiera y potencie el desarrollo de las competencias necesarias para su desempeño profesional. El capítulo uno comprende las nociones preliminares de sistemas coordenados y distancia. El segundo capítulo estudia los vectores desde el punto de vista geométrico y algebraico. En el tercer capítulo se estudia la línea recta y las superficies planas. El cuarto capítulo presenta los cambios en el sistema coordenado de referencia, a través de las transformaciones de coordenadas por traslación y rotación. En el quinto capítulo, se estudia la representación del sistema cartesiano en coordenadas polares. En el capítulo seis se definen las cónicas como lugares geométricos en términos de distancias y como lugares geométricos en el plano, además de la ecuación general de segundo grado y su vinculación con ellas. El capítulo siete comprende el estudio de las diferentes superficies en el espacio y su construcción a través de curvas en el plano. Por último, en el octavo capítulo, se estudia la representación de puntos del sistema de coordenadas cartesiano en otros sistemas de referencia como el de coordenadas cilíndricas y esféricas.

En cada capítulo se presentan los conceptos fundamentales necesarios para la comprensión de las temáticas desarrolladas, haciendo énfasis en la visualización geométrica de estos y las operaciones. De igual forma, en cada uno de los apartados se presentan ejemplos totalmente desarrollados y gran variedad de ejercicios propuestos, correspondientes a las temáticas tratadas en cada capítulo, de tal manera que se posibilite un aprendizaje significativo y se adquieran las competencias en el estudiante.

Esperamos que este libro sea de gran ayuda para profesores y estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica y brinde las herramientas necesarias para la comprensión de conceptos en cursos posteriores y más avanzados.

CAPÍTULO 1

COORDENADAS CASTESIANAS

CAPÍTULO 1
COORDENADAS CASTESIANAS

Hasta Descartes (1591−1661), la geometría, que trata de las líneas y formas, y el álgebra, que trata de números, se consideraban como aspectos totalmente independientes de la matemática. Descartes demostró que casi todos los problemas en la geometría se traducen en problemas de Álgebra, en lo que respecta a preguntas acerca de la longitud de un segmento, y utilizando un sistema de coordenadas para describir el problema.

Descartes encontró una nueva forma de estudiar la geometría. Había sido perturbado por los métodos de los geómetras griegos durante mucho tiempo. Se propuso mejorar el manejo de líneas y figuras planas por medio de una gráfica. El gráfico fue hecho marcando unidades en una línea horizontal, el eje x, y una línea vertical, el eje y, perpendiculares entre sí. Figuras y líneas pueden ser dibujadas en el gráfico, y de acuerdo con su posición, describirla con números.

Todas la leyes de la geometría euclidiana mantienen su verdad en la nueva geometría coordenada. Uno de los avances de la geometría de Descartes con respecto a la euclidiana es que la longitud de un segmento de línea recta puede ser fácilmente determinado y expresado con un número.

El **OBJETIVO** de este capítulo es que el estudiante logre:

- Identificar cantidades escalares
- Aprender a reconocer un sistema coordenado, en la recta, en el plano, en el espacio
- Graficar puntos en los diferentes sistemas coordenados
- Calcular magnitudes (distancias entre dos puntos) de segmentos en cada sistema coordenado
- Identificar y realizar operaciones con segmentos
- Resolver algunos problemas de aplicación

A continuación, se desarrollarán las características de estos sistemas coordenados y la forma de determinar la longitud de segmentos de línea recta.

1.1 Coordenadas cartesianas en una dimensión

Consideremos la recta horizontal $X'X$ y sea O un punto fijo sobre la recta. El punto O se llama origen del sistema coordenado. Se toma una longitud adecuada como unidad de medida, dividiendo la recta a ambos lados de O. A cada punto de la recta $X'X$ corresponde un número real. Por convención, si el punto está al lado derecho de O, tiene coordenada positiva; si está al lado izquierdo, tiene coordenada negativa. A esta recta se le denomina recta real o eje x (Ver Figura 1.1).

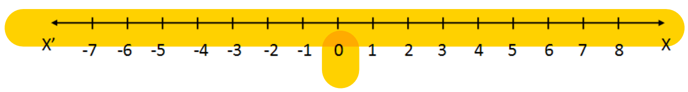


Figura 1.1: Sistema coordenado unidimensional

Cada punto P sobre la recta tiene una coordenada x, representado de la forma $P(x)$. Por ejemplo, en la Figura 1.2, el punto A tiene por coordenada $A(-3)$ y el punto Q, tiene coordenada $Q(\frac{3}{2})$

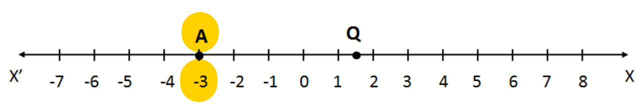


Figura 1.2: Coordenada unidimensional de un punto

1.1.1 Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos sobre el sistema cartesiano unidimensional $P(x_1)$ y $Q(x_2)$, la distancia entre P y Q, representada por $|\overline{PQ}|$ está definida por:

$$|\overline{PQ}| = |x_2 - x_1| \tag{1.1.1}$$

Ejemplo 1.1.1 *Hallar la distancia entre los puntos $A(-3)$ y $B(6)$*

Solución

La situación se muestra en la Figura 1.3
La distancia entre los puntos $A(-3)$ y $B(6)$ es:

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1| = |(6) - (-3)| = 9 \ unidades$$
$$|\overline{BA}| = |x_1 - x_2| = |(-3) - (6)| = 9 \ unidades$$

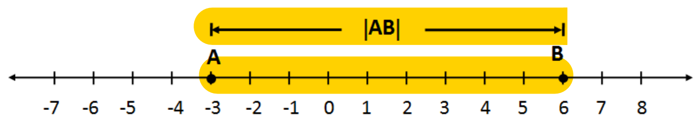


Figura 1.3: Distancia entre puntos A y B

1.1.2 División de un segmento en una razón dada

Consideremos los puntos $P(x_1)$ y $Q(x_2)$, extremos del segmento $\overline{PQ}$. Supongamos que se requiere hallar un punto que divida al segmento en una razón r dada a partir de P. Sea $R(x)$, el punto que cumple con esa condición (Ver Figura 1.4).

Figura 1.4: División de un segmento en una razón dada

La razón r, a partir de P es:

$$r = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$$

como $|\overline{PR}| = |x - x_1|$ y $|\overline{RQ}| = |x_2 - x|$, tenemos:

$$r = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|}$$

Por otro lado, note que $x_1 < x < x_2$ [1], luego,

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$rx_2 + x_1 = x + rx$$

$$rx_2 + x_1 = x(1 + r)$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

entonces, si $P(x_1)$ y $Q(x_2)$ son los extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado unidimensional.

[1] Por tanto, $x - x_1 > 0 \quad y \quad x_2 - x > 0$

La coordenada del punto $R(x)$ que divide a este segmento en la razón $r = \dfrac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$ es:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \tag{1.1.2}$$

Si $R(x)$ es punto medio del segmento $\overline{PQ}$, $r = 1$, entonces:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{1.1.3}$$

Ejemplo 1.1.2 *Hallar las coordenadas del punto que está a $\frac{2}{3}$ de la distancia de $A(-4)$ a $B(2)$.*

A (-4) —— P(x) —— B(2)

La distancia AB es $|AB| = |2-(-4)| = 2+4 = 6$

La distancia AP= $\frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} * 6 = 4$ $\quad |AP| = 4$

La distancia PB= $\frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} * 6 = 2$ $\quad |PB| = 2$

Como la razón r es $\quad r = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{4}{2} = 2$

Y seguiría como el PDF

Solución

Sea $P(x)$ el punto, entre A y B, que se encuentra a partir de A (

$$r = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} \quad \text{, entonces} \quad r = \frac{\frac{2}{3}|\overline{AB}|}{\frac{1}{3}|\overline{AB}|} = 2,$$

así

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-4 + (2)(2)}{1 + 2} = \frac{-4 + 4}{3} = 0$$

Luego, la coordenada del punto es $P(0)$ o $P = (0)$ (Ver Figura 1.5).

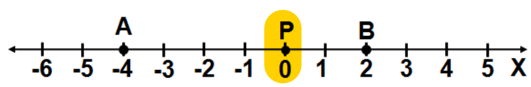


Figura 1.5: Coordenadas del punto P

Ejercicios Sección 1.1.1

1. Hallar la distancia entre los pares de puntos dados en cada ítem:

a) $A(-2)$, $B(1)$

b) $P\left(\frac{5}{2}\right)$, $Q(-3)$

c) $R\left(-\frac{2}{3}\right)$, $S\left(-\frac{1}{4}\right)$

2. La distancia entre dos puntos A y B es 8. Si uno de los puntos es $A(-3)$, hallar la coordenada del otro punto.

3. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son $P(-12)$ y $Q(-\frac{1}{5})$.

4. El extremo de un segmento es $M\left(\frac{3}{2}\right)$ y su punto medio es $N(-2)$. Hallar la coordenada del otro extremo del segmento.

5. Si P, Q, R y S son cuatro puntos distintos cualesquiera de una recta, demostrar que para todas las ordenaciones posibles de estos puntos sobre la recta, se verifica la igualdad:
$$|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| + |\overline{RS}| = |\overline{PS}|$$

1.2 Coordenadas cartesianas en dos dimensiones

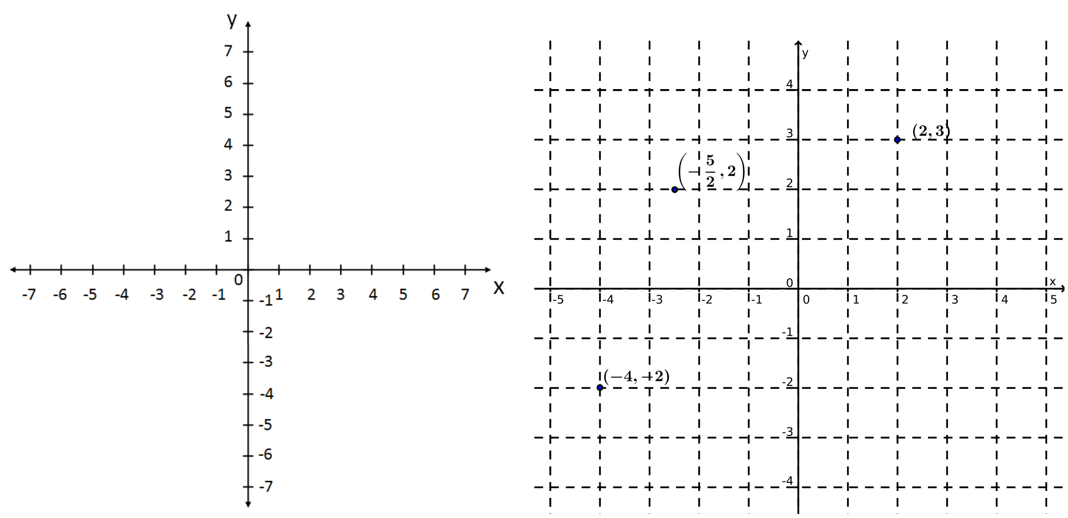


Figura 1.6: Sistema coordenado bidimensional (izquierda), ubicación de puntos en el sistema coordenado rectangular bidimensional (derecha)

Al realizar estudios analíticos de propiedades geométricas, se encuentran muchas limitaciones al trabajar en un sistema coordenado unidimensional, ya que todos los puntos están restringidos a estar sobre una línea recta. Ahora, consideremos un sistema de coordenadas donde un punto pueda moverse en diferentes direcciones sobre un plano. A este sistema se le llama sistema coordenado bidimensional.
Iniciaremos el estudio de estos sistemas coordenados con el sistema coordenado rectangular.
Este sistema está formado por dos rectas $X'X$ y $Y'Y$, perpendiculares entre sí, llamadas ejes coordenados. Las rectas se cortan en el punto O, llamado origen de coordenadas. A la recta $X'X$ se le llama eje x o eje de abscisas y a la recta $Y'Y$ se le llama eje y o eje de ordenadas (Ver Figura 1.6).
Las coordenadas de un punto P en el sistema coordenado rectangular es de la forma (x, y) y se representa $P(x, y)$, donde x es la distancia del punto al eje x y y, la distancia del punto al eje y. Observe en la Figura 1.6 derecha, la ubicación de los puntos C, D y E, con sus respectivas coordenadas cartesianas.

Se debe adoptar una escala apropiada en cada eje coordenado para poder representar adecuadamente puntos de coordenadas conocidas. Ambos ejes coordenados pueden tener escalas iguales o diferentes.

1.2.1 Distancia entre dos puntos

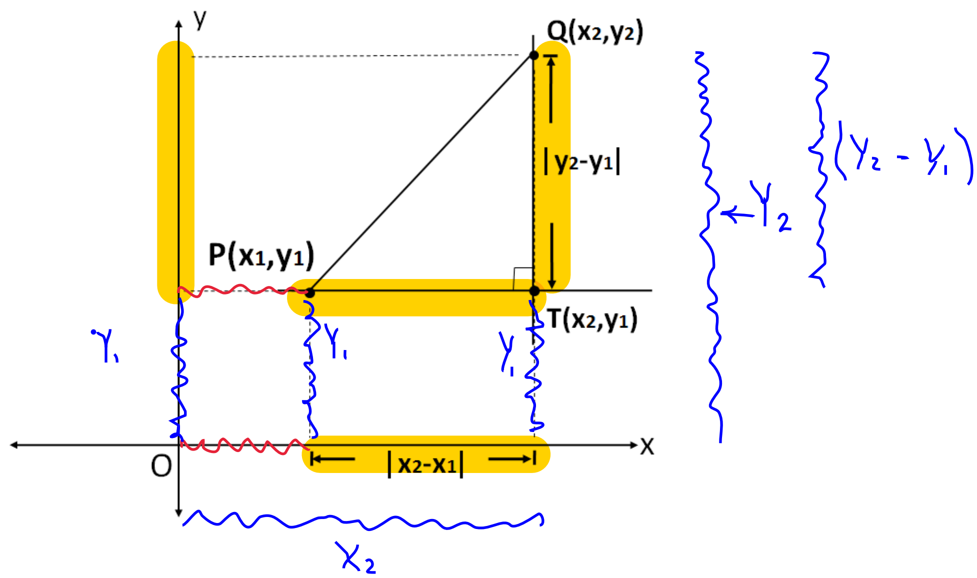


Figura 1.7: Distancia entre puntos en el sistema coordenado rectangular

Consideremos dos puntos en el sistema coordenado rectangular $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. Construimos un triángulo rectángulo, trazando por P una paralela al eje x y por Q una paralela al eje y, de tal manera que el segmento $\overline{PQ}$ sea la hipotenusa (Ver Figura 1.7). La distancia del punto P al punto T es $|\overline{PT}| = |x_2 - x_1|$ y la distancia del punto Q al punto T es $|\overline{QT}| = |y_2 - y_1|$.
Aplicando el teorema de pitágoras tenemos:

$$(|\overline{PQ}|)^2 = (|\overline{PT}|)^2 + (|\overline{QT}|)^2$$

$$(|\overline{PQ}|)^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$$

Luego,

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.2.1}$$

Así, dados dos puntos sobre el sistema cartesiano bidimensional $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia entre P y Q, es la representada por $|\overline{PQ}|$ en la ecuación (1.2.1).

Ejemplo 1.2.1 *Hallar la distancia entre los puntos* $A(2,-5)$ *y* $B(-4,-1)$.

Solución

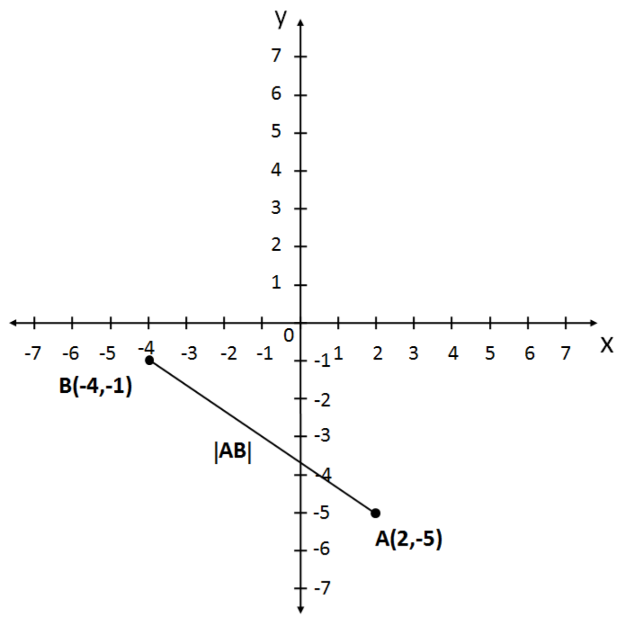


Figura 1.8: Distancia entre puntos A y B

La distancia entre los puntos $A(2,-5)$ y $B(-4,-1)$ (Ver Figura 1.8) es:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{((-4) - (2))^2 + ((-1) - (-5))^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{52}$$

$$|\overline{AB}| = 2\sqrt{13}\ unidades$$

1.2.2 División de un segmento en una razón dada

Consideremos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado rectangular bidimensional, y $R(x, y)$ que divide a este segmento en la razón dada r, donde $r = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$. Trazando perpendiculares a los ejes coordenados a partir de P, Q y R, obtenemos P_x, P_y, R_x, R_y. Q_x y Q_y (Ver Figura 1.9).

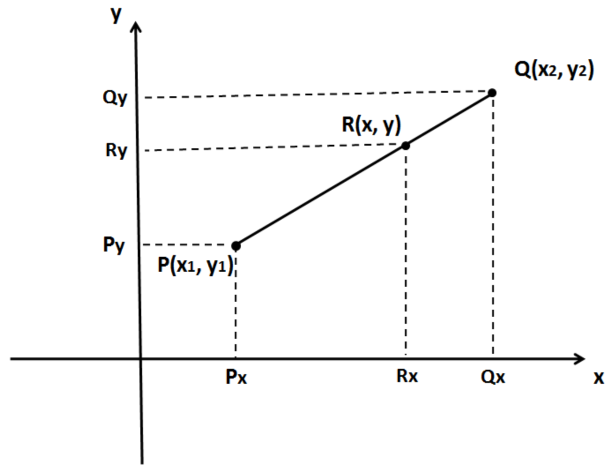


Figura 1.9: División de un segmento en una razón dada

Se sabe de la geometría plana, que cuando tres paralelas cortan a dos o más transversales, los segmentos obtenidos son proporcionales, entonces:

$$\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|} = \frac{|\overline{P_xR_x}|}{|\overline{R_xQ_x}|} = \frac{|\overline{P_yR_y}|}{|\overline{R_yQ_y}|}$$

Luego:

$$r = \frac{|\overline{P_xR_x}|}{|\overline{R_xQ_x}|} \qquad r = \frac{|\overline{P_yR_y}|}{|\overline{R_yQ_y}|}$$

Reemplazando los valores de las distancias de los segmentos tenemos:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Despejando a x y y de cada expresión obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \tag{1.2.2}$$

Así, dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ los extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado rectangular bidimensional. Las coordenadas del punto $R(x, y)$ que divide a este segmento en la razón dada $r = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$ están dadas por (1.2.2).
Si $R(x, y)$ es punto medio de $\overline{PQ}$, $r = 1$, entonces:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{1.2.3}$$

Ejemplo 1.2.2 *Hallar las coordenadas del punto que está a* $\frac{3}{4}$ *de la distancia de* $R(-1, 3)$ *a* $T(2, -5)$

Solución

Sea $Q(x, y)$ las coordenadas del punto buscado, la razón r está dada por:

$$r = \frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{QT}|}$$

Luego,

$$r = \frac{\frac{3}{4}|\overline{RT}|}{\frac{1}{4}|\overline{RT}|}$$
$$r = 3$$

Por tanto, las coordenadas del punto son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Reemplazando los valores dados tenemos:

$$x = \frac{-1 + (3)(2)}{1 + 3} \qquad y = \frac{3 + (3)(-5)}{1 + 3}$$

$$x = \frac{-1 + 6}{4} \qquad y = \frac{3 - 15}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \qquad y = \frac{-12}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \qquad y = -3$$

Las coordenadas del punto buscado son: $Q(\frac{5}{4}, -3)$ (Ver Figura 1.10).

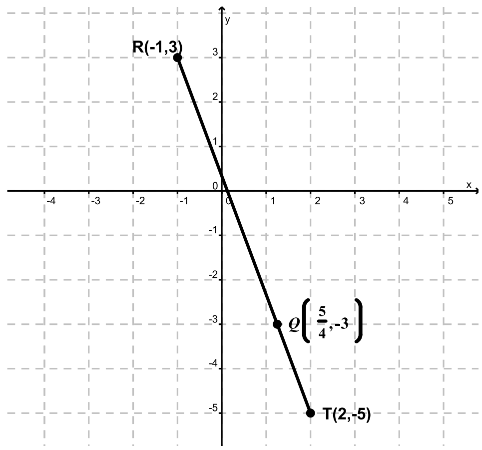


Figura 1.10: Coordenadas del punto Q

Ejemplo 1.2.3 *Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo, cuyos vértices son:* $A(-2,3)$, $B(1,-2)$ *y* $C(-1,-3)$

Solución

El baricentro de un triángulo es el punto de cruce entre las medianas[2]. Este punto se encuentra a los $\frac{2}{3}$ sobre la mediana, medidos a partir del vértice. El triángulo formado por los puntos A, B y C se muestra en la Figura 1.11.

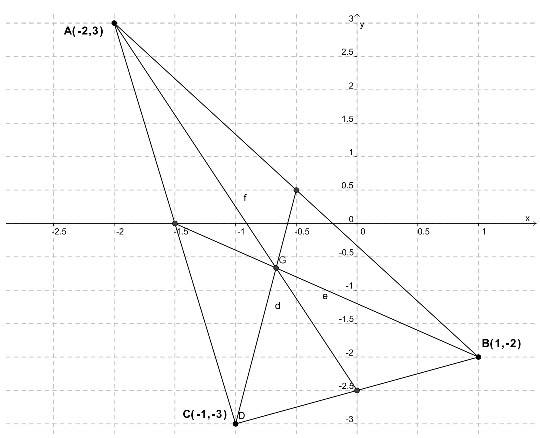


Figura 1.11: Ubicación de los puntos A, B y C y del baricentro en el triángulo ABC

Hallamos las coordenadas del punto medio de uno de los lados. Para el segmento $\overline{AB}$, si el punto $R(x,y)$ es el punto medio, tenemos:

[2]Las medianas son los segmentos de recta que unen cada vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x = \frac{-2 + (1)}{2} \qquad\qquad y = \frac{3 + (-2)}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad y = \frac{1}{2}$$

$$R\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ahora, sobre la mediana $\overline{CR}$ buscamos el punto $T(x_3, y_3)$, con $r = \dfrac{\frac{2}{3}|\overline{CR}|}{\frac{1}{3}|\overline{CR}|} = 2$

$$x_3 = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad\qquad y_3 = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$x_3 = \frac{-1 + (2)(-\frac{1}{2})}{1 + 2} \qquad\qquad y_3 = \frac{-3 + (2)(\frac{1}{2})}{1 + 2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - 1}{3} \qquad\qquad y_3 = \frac{-3 + 1}{3}$$

$$x_3 = -\tfrac{2}{3} \qquad\qquad y_3 = -\tfrac{2}{3}$$

Entonces, las coordenadas del baricentro son $G\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Verifíquese que este punto coincide para cada mediana (Ver Figura 1.11).

Ejercicios Sección 1.2.1

1. Hallar la distancia entre los puntos dados

a) $P(-1, 2)$, $Q(2, -4)$

b) $C\left(\frac{2}{5}, -2\right)$, $D(-1, 1)$

c) $T\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}\right)$, $R\left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{4}\right)$

d) $C(4, \sqrt{3})$, $D(2, -1)$

2. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-1, 3)$, $(4, 8)$, $(3, -4)$ y $(2, -6)$.

3. Dados los puntos $A(2, y)$, $B(-8, 4)$ y $C(5, 3)$ Determinar y para que ABC sea un triángulo rectángulo con ángulo recto en A.

4. Determine las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 que dividen al segmento en tres partes iguales, cuyos extremos son $A(3,-1)$ y $B(0,8)$.

5. El baricentro del triángulo ABC es el punto $G(4,0)$, y $M(2,3)$ es el punto medio de lado $\overline{BC}$. Encuentre las coordenadas del vértice A.

1.3 Coordenadas cartesianas en tres dimensiones

Al estudiar la geometría analítica plana, se tienen en cuenta puntos que están localizados en un solo plano. Esta restricción, al igual que en el caso unidimensional, hacen que algunas figuras no puedan estudiarse. Consideremos un sistema en el cual un punto pueda moverse en direcciones diferentes en un plano y fuera de él. A este sistema se le llama *sistema coordenado tridimensional*.

Al situar un punto en un lugar diferente al del plano coordenado, su posición es determinada por su distancia perpendicular a él. Esto hace que sea necesario introducir otra dimensión adicional a la del plano coordenado. De los sistemas coordenados tridimensionales, describiremos las características del más usado: el *sistema coordenado rectangular tridimensional*.

El sistema coordenado tridimensional rectangular está formado por el plano coordenado xy, al cual se le traza un tercer eje perpendicular a dicho plano y que pasa por el origen de coordenadas, llamado eje z (Ver Figura 1.12). Al eje x se le denomina eje de abscisas, al eje y, eje de ordenadas; y al eje z, altura o cota.

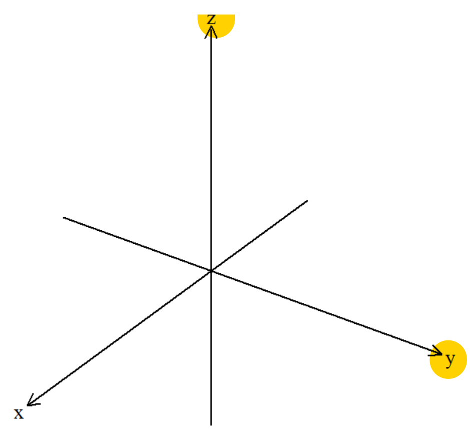


Figura 1.12: Sistema coordenado tridimensional rectangular

Tomando como referencia la Figura 1.12, el eje x es positivo a la izquierda y negativo a la derecha; el eje y, positivo a la derecha y negativo a la izquierda; y el eje z, positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

La designación de los ejes x, y, y z es de libre albedrío. Por convención, se adoptará el llamado *sistema derecho*, el cual ubica los ejes a partir del eje x, y en sentido antihorario se ubican consecutivamente el eje y y el eje z (Ver figura 1.13).

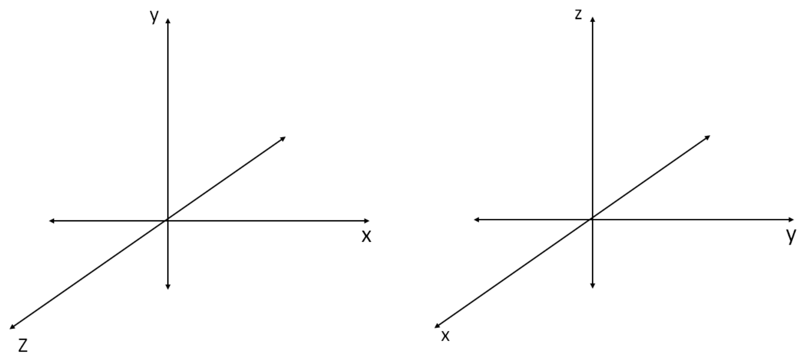


Figura 1.13: Sistema coordenado derecho

Las coordenadas de un punto P en el sistema coordenado rectangular tridimensional es de la forma (x, y, z) y se representa $P(x, y, z)$, donde x es la distancia del punto al eje x, y la distancia del punto al eje y; y z la distancia del punto al eje z. Observe en la Figura 1.14, la ubicación de los puntos P, Q y R, con sus respectivas coordenadas cartesianas.

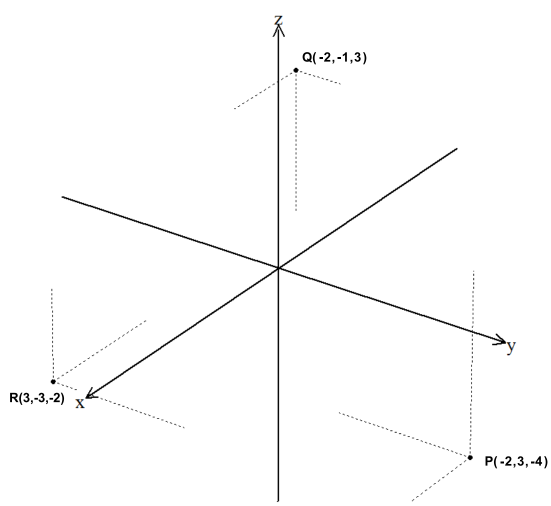


Figura 1.14: Ubicación de puntos en el sistema coordenado rectangular tridimensional

1.3.1 Distancia entre dos puntos

Consideremos dos puntos en el sistema coordenado rectangular tridimensional $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x_2, y_2, z_2)$. Los puntos $A(x_1, y_1, 0)$ y $T(x_2, y_2, 0)$, son la proyección de Q y R en el plano xy, respectivamente (Ver Figura 1.15).

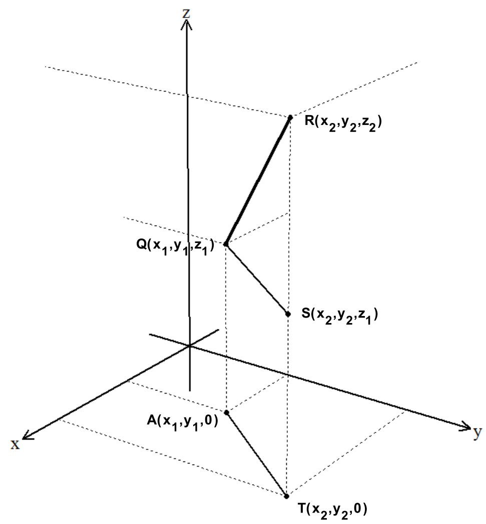


Figura 1.15: Distancia entre puntos en el sistema coordenado rectangular tridimensional

Como A y T son puntos en el plano xy, la distancia de A a T es:

$$|\overline{AT}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Al trazar el segmento $\overline{QS}$ paralelo al segmento $\overline{AT}$ obtenemos el triángulo rectángulo QRS. Aplicando el teorema de pitágoras tenemos:

$$(|\overline{QR}|)^2 = (|\overline{QS}|)^2 + (|\overline{SR}|)^2$$

además

$$|\overline{QS}| = |\overline{AT}|$$

y

$$|\overline{RS}| = |z_2 - z_1|$$

luego:

$$(|\overline{QR}|)^2 = (\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2})^2 + (|z_2 - z_1|)^2$$
$$(|\overline{QR}|)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$|\overline{QR}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Entonces, dados dos puntos sobre el sistema cartesiano tridimensional $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x_2, y_2, z_2)$, la distancia entre Q y R, representada por $|\overline{QR}|$, está dada por:

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.3.1}$$

Ejemplo 1.3.1 *Hallar la distancia entre los puntos* $R(3,-2,4)$ *y* $S(-1,3,-5)$

Solución

La distancia entre los puntos $R(3,-2,4)$ y $S(-1,3,-5)$ es:

$$|RS| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{(-1-3)^2+(3-(-2))^2+(-5-4)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{(-4)^2+(5)^2+(-9)^2}$$

$$|RS| = \sqrt{122}\ unidades$$

La ubicación de los puntos R y S se muestra en la Figura 1.16.

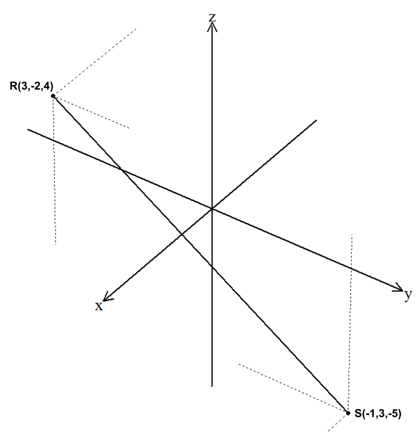


Figura 1.16: Distancia entre puntos R y S

1.3.2 División de un segmento en una razón dada

De forma análoga al sistema coordenado rectangular bidimensional, se encuentran las coordenadas de un punto que divide un segmento en una razón dada en el sistema rectangular tridimensional.
Sean $P(x_1,y_1,z_1)$ y $Q(x_2,y_2,z_2)$ los extremos del segmento $\overline{PQ}$ en el sistema coordenado rectangular tridimensional. Las coordenadas del punto $R(x,y,z)$ que divide a este segmento en la razón dada, $r=\dfrac{|\overline{PR}|}{|\overline{RQ}|}$ son:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \qquad z=\frac{z_1+rz_2}{1+r} \tag{1.3.2}$$

Ejemplo 1.3.2 *Hallar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos* $A(-1,3,-4)$ *y* $B(2,-2,6)$

Solución

En el punto medio $r=1$, entonces las coordenadas del punto medio $S(x,y,z)$ son:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r} \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r} \qquad z=\frac{z_1+rz_2}{1+r}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$$x=\frac{-1+2}{2} \qquad y=\frac{3-2}{2} \qquad z=\frac{-4+6}{2}$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{1}{2} \qquad z=1$$

Luego, las coordenadas del punto medio S son: $S\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ (Ver Figura 1.17).

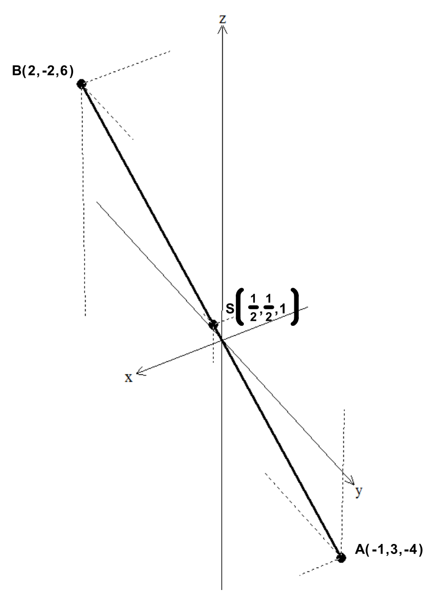


Figura 1.17: Coordenadas del punto medio S

Ejercicios Sección 1.3.1

1. Hallar al distancia entre los puntos dados

a) $D(-1,2,3)$, $C(4,3,8)$

b) $T(0,1,-3)$, $R(4,-2,-1)$

c) $P\left(\frac{1}{2},-3,1\right)$, $Q(-\frac{3}{4},\frac{2}{3},-2)$

d) $A(1,-\frac{2}{5},0)$, $B(1,-6,2)$

2. Probar que los puntos $A(2,0,1)$, $B(3,1,5)$ y $C(4,2,9)$ son colineales.

3. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{AB}$ en una razón de 2, sabiendo que $A(2,5,-1)$ y $B(3,0,-2)$.

4. Calcular los vértices de un triángulo donde son dados el baricentro $G(2,2,3)$ y los puntos medios de dos lados $M_1(1,2,4)$ y $M_2(2,3,3)$.

Ejercicios Capítulo 1

1. Hallar la distancia entre los pares de puntos dados:

a) $A(-2,3)$, $B(1,5)$

b) $P(5,-1)$, $Q(2,0)$

c) $C(0,-3)$, $B(2,0)$

d) $T(-1,-3)$, $V(-4,-5)$

e) $T(-1,2,5)$, $V(4,5,-9)$

f) $P(0,2,0)$, $Q(4,0,2)$

g) $M(-2,4,3)$, $N(-1,-2,-3)$

h) $S(0,-1,3)$, $U(3,-1,4)$

2. Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices se dan:

a) $A(5,7)$, $B(1,-3)$, $C(-5,1)$

b) $P(2,-1)$, $Q(6,7)$, $R(-4,-3)$

c) $A(3,6)$, $B(-5,2)$, $C(7,-6)$

d) $A(3,6,-1)$, $B(-5,2,2)$, $C(7,-6,-2)$

e) $M(1,-2,-1)$, $N(3,1,1)$, $O(-1,4,5)$

3. Demostrar, mediante la fórmula de distancia, que los puntos dados son o no colineales.

a) $(-1,3)$, $(2,-2)$, $(3,-1)$

b) $(0,4)$, $(3,-2)$, $(-2,8)$

c) $(-2,3)$, $(-6,1)$, $(-10,-1)$

d) $(1,2)$, $(-3,10)$, $(4,-4)$

e) $(-2,-3,-2)$, $(-3,1,4)$, $(2,3,-1)$

4. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: $(1,3)$, $(3,6)$, $(2,-2)$, $(5,-4)$

5. Demostrar que los puntos $P(-2,4,-3)$, $Q(4,-3,-2)$ $R(-3,-2,4)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

6. Demuestre que los puntos $A(6,3,4)$, $B(2,1,-2)$ y $C(4,-1,10)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

7. Demuestre que los puntos $M(3,5,2)$, $N(2,3,-1)$ y $P(6,1,-1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

8. Demuestre que el punto $A(1,-2)$ equidista de los puntos $P(-11,3)$, $R(6,10)$ y $T(1,11)$.

9. Hallar las coordenadas del punto $R(x_2,y_2)$, sabiendo que el punto $Q(9,2)$ está a $\frac{3}{7}$ de la distancia de $P(6,8)$ a R.

10. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $(-2,1)$, $(5,2)$ y $(2,-3)$.

11. El segmento que une $P(-2,-1)$ con $Q(3,3)$ se prolonga hasta R. Sabiendo que $QR = 3PQ$, hallar las coordenadas de R.

12. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $(3,2)$, $(-1,-2)$ y $(5,-4)$.

13. Demostrar en forma analítica que las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes del cuadrilátero $P(-3,2)$, $Q(5,4)$, $R(7,-6)$ y $S(-5,-4)$ forman otro cuadrilátero, cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del primero.

14. Hallar el área del polígono cuyos vértices son: $(2,5)$, $(7,1)$, $(3,-4)$ y $(-2,3)$.

15. Hallar el área del polígono cuyos vértices son: $(1,5)$, $(-2,4)$, $(-3,-1)$, $(2,-3)$ y $(5,1)$.

16. Calcular el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo de vértices $A(5,-6)$, $B(1,2)$ y $C(3,-4)$.

17. Un triángulo equilátero tiene vértices $A(x,y)$, $B(3,1)$ y $C(-1,-1)$. Calcular el vértice A.

18. Sean $M_1(2,-1)$, $M_2(1,-2)$ y $M_3(-1,3)$ los puntos medios de los lados de un triángulo. Hallar los vértices del triángulo.

19. Dados dos vértices $A(9,-5,12)$ y $B(6,1,19)$ del paralelogramo $ABCD$ y $P(4,-1,7)$ el punto de intersección de sus diagonales, determinar los vértices C y D.

20. Hallar el volumen de la pirámide de base $OABC$ y P el vértice superior. Dados $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$ y $P(1,1,9)$.

CAPÍTULO 2

VECTORES

CAPÍTULO 2
VECTORES

La noción de vector está implícitamente contenida en las reglas de composición de las fuerzas y de las velocidades, conocidas hacia el fin del siglo XVII. Es en relación con la representación geométrica de los números llamados imaginarios, cuando las operaciones vectoriales se encuentran por primera vez implícitamente realizadas, sin que el concepto de vector estuviera aún claramente definido. Fue mucho más tarde, y gracias al desarrollo de la geometría moderna y de la mecánica, cuando la noción de vector y de operaciones vectoriales se concretó. El alemán Grassman, en 1844, por métodos geométricos introdujo formalmente las bases del cálculo vectorial (suma, producto escalar y vectorial).

El inglés Hamilton, por cálculos algebraicos, llegó a las mismas conclusiones que Grassman; empleó por primera vez los términos *escalar* y *vectorial*. Hacia el final del siglo XIX, el empleo de los vectores se generalizó a toda la física. Bajo la influencia de los ingleses Hamilton, Stokes, Maxwell y Heaviside, y del americano Gibbs (quien utilizó la notación del punto para el producto escalar, y del x para el producto vectorial), se amplió el cálculo vectorial, introduciendo nociones más complejas, como los operadores vectoriales: gradiente, divergencia y rotacional.

El OBJETIVO de este capítulo es que el estudiante logre:

- Aprender a reconocer un vector
- Graficar vectores
- Diferenciar magnitudes vectoriales y escalares
- Identificar y realizar operaciones con vectores
- Aplicar el concepto de vector a problemas físicos

A continuación desarrollaremos los conceptos básicos de los vectores.

2.1 Concepto de vector y algunas definiciones

Un vector es un arreglo de la forma:

$$\mathbf{U} = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle \tag{2.1.1}$$

Donde las u_i, $i = 1, 2, ..., n$ son en general números reales llamadas las componentes del vector. A un vector, como en la forma anterior, lo llamaremos n-tupla, n-ada o simplemente "vector con n componentes".

Un vector se puede nombrar con letras mayúscula $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ entre otras, o también con letras minúsculas $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ entre otras. La escogencia del nombre depende del contexto y de la forma como se han nombrado los otros elementos. Cuando entre los elementos aparecen puntos, se acostumbra dejar la letra mayúscula para el punto y la minúscula para el vector. Lo importante en estos casos es saber diferenciar conceptualmente el significado de vector y de punto, y establecer diferencias entre los nombres. En este texto usaremos convenientemente letras mayúsculas y minúsculas para nombrar los vectores.

Existen otras representaciones para vectores, como vectores columna, vectores fila, vectores coordenados, en términos de componentes, entre otras. En este texto usaremos la notación definida en (2.1.1) para denotar un vector. Si es necesaria otra notación lo indicaremos en su momento.

El conjunto que contiene todas las n-tuplas se representa como:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{U}/\mathbf{U} = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle\, ; u_i \in \mathbb{R}\}$$

Cuando $n = 2$, al vector $\mathbf{U} = \langle x, y \rangle$, se le llama par ordenado o vector bidimensional, y se puede ver como un elemento del plano, como muestra la Figura 2.1 a).

Cuando $n = 3$, al vector $\mathbf{U} = \langle x, y, z \rangle$ se le llama tripleta o vector tridimensional, y se puede ver como un elemento del espacio, como muestra la Figura 2.1 b).

Al vector $\langle 0, ..., 0 \rangle$ se le llama el vector **cero** y se denota por $\mathbf{O}$; esto es:

$$\mathbf{O} = \langle 0, ..., 0 \rangle$$

Cualquier punto del espacio $\mathbb{R}^n$ representa el vector **cero**. Para los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$, el vector cero es: $\mathbf{O} = \langle 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{O} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ respectivamente.

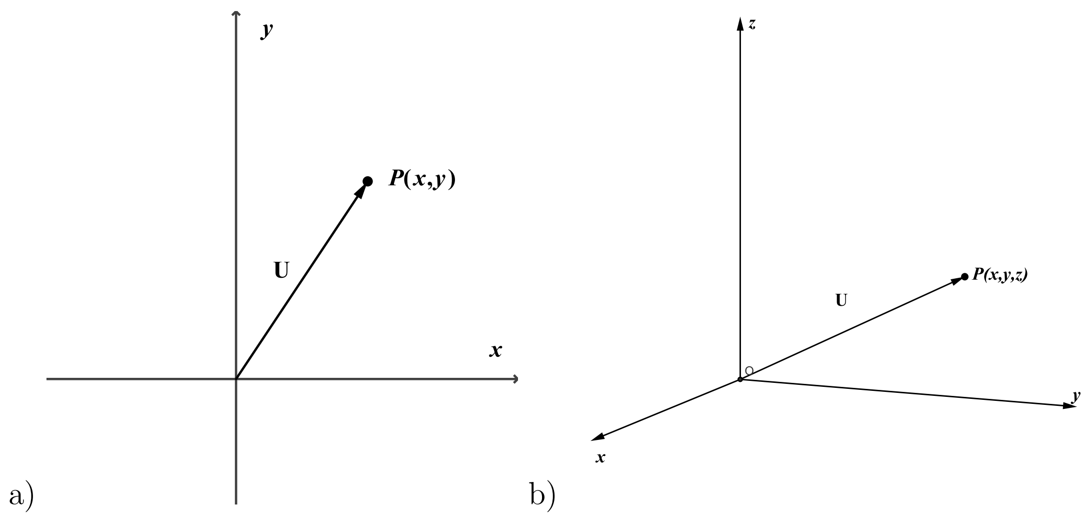


Figura 2.1: Representación de un vector a) vector del plano b) vector del espacio

Gráficamente se puede representar un vector del plano o del espacio, como se muestra en la Figura 2.1. En donde al vector $\mathbf{P}$ se le llama vector posición del punto P, $\mathbf{P}$ es la representación del vector dirigido $\overrightarrow{OP}$ (tiene principio en el origen de coordenadas y final en el punto P).

Dos vectores son iguales si y sólo si sus respectivas componentes son iguales, esto es, si los vectores $\mathbf{U} = \langle u_1, ..., u_n \rangle$ y $\mathbf{V} = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ son iguales, entonces sus respectivas componentes son iguales; esto es: $u_1 = v_1, ..., u_n = v_n$.

Observación

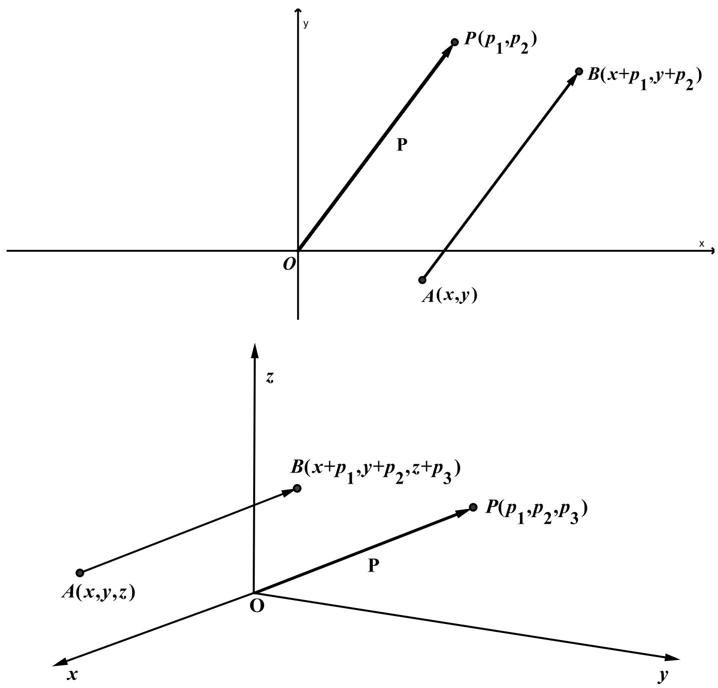
En el contexto de este texto usaremos la representación gráfica de un vector, como la del vector posición, es decir, en la Figura 2.1 la representación que hace U.

Si $\mathbf{P} = \langle p_1, p_2 \rangle$ es un vector posición del punto $P(p_1, p_2)$, $\mathbf{P}$ puede ser también representado por un vector con origen en el punto $A(x, y)$ y punto final en $B(x + p_1, y + p_2)$ cuando el vector $\mathbf{P}$ está en el plano (Ver Figura 2.2 a)).

De la misma manera, si $\mathbf{P} = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ es un vector posición del punto $P(p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{P}$ puede ser también representado por un vector con origen en el punto $A(x, y, z)$ y punto final en $B(x + p_1, y + p_2, z + p_3)$, cuando el vector $\mathbf{P}$ está en el espacio. Es decir, el vector $\mathbf{P}$ también representa al vector dirigido $\overrightarrow{AB}$ (Ver Figura 2.2 b)).

Por otro lado, si $\mathbf{V} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es un vector del plano que tiene representación $\overrightarrow{AB}$ dirigido desde el punto $A(x_1, y_1)$ al punto $B(x_2, y_2)$, entonces por la igualdad de vectores debemos tener que $x_1 + v_1 = x_2$ y $y_1 + v_2 = y_2$ de donde se tiene que $v_1 = x_2 - x_1$ y $v_2 = y_2 - y_1$, es decir, el vector:

$$\mathbf{V} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle. \tag{2.1.2}$$



a) b)

Figura 2.2: Representación del vector dirigido en el plano y el espacio

De manera similar, para un vector $\mathbf{V} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ del espacio que tiene representación $\overrightarrow{AB}$ dirigido desde el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ al punto $B(x_2, y_2, z_2)$ se tiene que:

$$\mathbf{V} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \tag{2.1.3}$$

Ejemplo 2.1.1 *Considere el vector* $\boldsymbol{A} = \langle 3, -2 \rangle$ *y el punto* $P(-3, 4)$*; dibuje la representación del vector de posición* $\boldsymbol{A}$ *y la representación del vector* $\boldsymbol{A}$*, pero con origen en* P.

Solución

Para representar el vector de posición $\mathbf{A}$ es suficiente graficar el punto $A(3, -2)$, el vector de posición es el vector dirigido $\overrightarrow{OA}$.

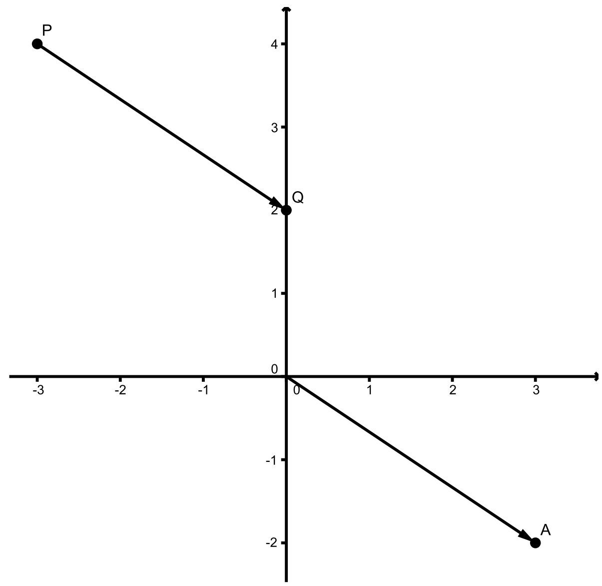


Figura 2.3: Representación del vector A con punto inicial en P

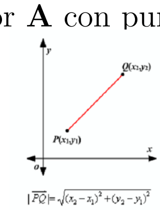
Para representar el vector $\mathbf{A}$ con origen en P definimos el punto final desconocido como $Q(x, y)$. Con las ecuaciones 2.1.2 podemos encontrar las componentes x e y del punto, esto es

$$\mathbf{A} = \langle 3, -2 \rangle = \langle x - (-3), y - 4 \rangle$$

de donde se tiene que:

$$\begin{aligned} 3 &= x + 3 & -2 &= y - 4 \\ x &= 0 & y &= 2 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

El punto Q queda determinado por $(0, 2)$, entonces el vector $\mathbf{A}$ con punto inicial en P es el vector dirigido $\overrightarrow{PQ}$ (ver Figura 2.3).



2.2 La magnitud de un vector

Para un vector $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$ de $\mathbb{R}^n$, se define la magnitud del vector $\mathbf{U}$ como

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2, ..., u_n^2} \tag{2.2.1}$$

Para los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$, tenemos

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

cuando $\mathbf{U} = \langle x, y \rangle$, y

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

cuando $\mathbf{U} = \langle x, y, z \rangle$ respectivamente.

La magnitud del vector $\mathbf{U}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\|\mathbf{U}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{U}\| = 0$, si y solo si $\mathbf{U} = \mathbf{O}$
3. Para $\mathbf{V}$ otro vector de $\mathbb{R}^n$ se cumple la desigualdad triangular $\|\mathbf{U}+\mathbf{V}\| \leq \|\mathbf{U}\| + \|\mathbf{V}\|$

Observaciones

1. A la magnitud de un vector $\mathbf{U}$ definida como antes, que cumple las propiedades anteriores se le llama norma del vector $\mathbf{U}$.
2. La magnitud o norma de un vector en $\mathbb{R}^n$ define en este espacio una distancia, esta es la medida del vector posición tomada desde el origen hasta el punto final ver Figura 2.1.

Ejemplo 2.2.1 *Considere el vector* $\boldsymbol{U} = \langle 5, 3, 2 \rangle$, *encuentre la magnitud o norma del vector* $\boldsymbol{U}$.

Solución

De acuerdo con la definición que se tiene de magnitud o norma de un vector:

$$\|\boldsymbol{U}\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 9 + 4} = \sqrt{38}$$

Ejercicios Sección 2.2.1

1. ¿Que diferencia hay entre el punto $(3, 1)$ y el vector $\langle 3, 1 \rangle$?
2. ¿Cuál es la diferencia entre vector y escalar? Enuncie tres tipos de cantidades que sean escalares y tres tipos de cantidades que sean vectoriales.
3. Identifique entre las siguientes cantidades cuáles son vectoriales y cuáles son escalares.
   a) El costo del boleto de un partido de fútbol
   b) La trayectoria de un avión de Bogotá a Medellín

c) La velocidad de la corriente de un río

d) La población de la ciudad de Medellín

e) La fuerza que ejerce un motor de un vehículo sobre el vehículo

4. Determine la magnitud de los vectores en cada caso:

   a) $\mathbf{A} = \langle -2, 3\rangle$
   b) $\mathbf{B} = \langle 5, -3\rangle$
   c) $\mathbf{C} = \langle -2, -3\rangle$
   d) $\mathbf{D} = \langle \cos(45°), \operatorname{sen}(45°)\rangle$
   e) $\mathbf{E} = \langle 2\cos(\pi), 2\operatorname{sen}(\pi)\rangle$
   f) $\mathbf{F} = \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\rangle$
   g) $\mathbf{H} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$
   h) $\mathbf{I} = \langle r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)\rangle$

5. Encuentre las longitudes de cada uno de los lados del triángulo que tiene vértices $V_1 = (-2, 4, 0)$, $V_2 = (1, 2, -1)$ y $V_3 = (-1, 1, 2)$, según las longitudes halladas, ¿qué tipo de triángulo es este?

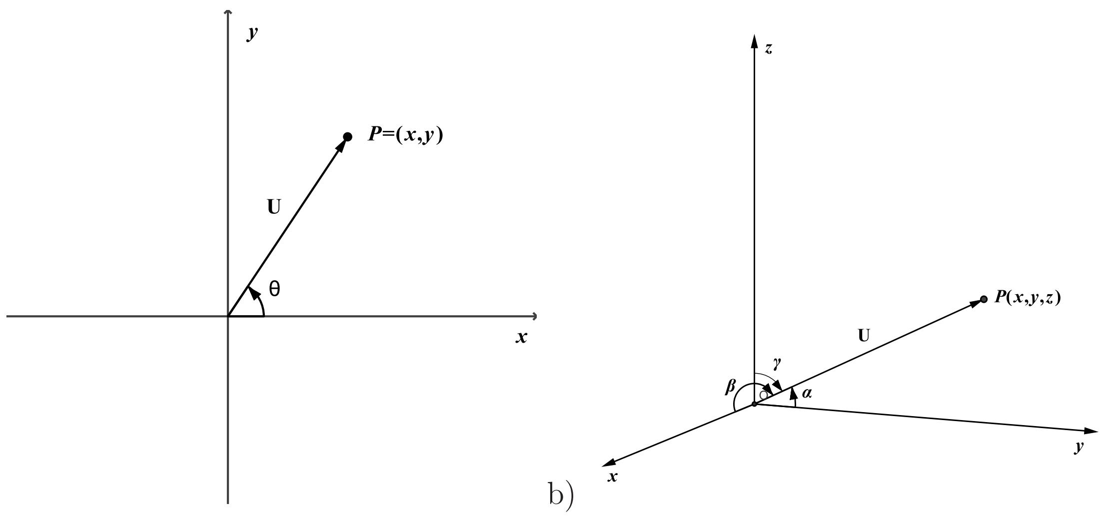
6. Forme los vectores correspondientes y demuestre que el triángulo que tiene vértices $V_1 = (3, -4, 1)$, $V_2 = (5, -3, 0)$ y $V_3 = (6, -7, 4)$ es un triángulo isósceles.

7. En cada caso dibuje la representación de $\mathbf{A}$, y también la representación de $\mathbf{A}$ con punto de incio en P.

   a) $\mathbf{A} = \langle 4, 3\rangle$; $P = (3, 1)$
   b) $\mathbf{A} = \langle -2, 1\rangle$; $P = (1, -1)$
   c) $\mathbf{A} = \langle \pi, -3\rangle$; $P = (-3, 1)$
   d) $\mathbf{A} = \langle 0, 3\rangle$; $P = (0, 3)$

8. Determine en cada caso el punto D de tal manera que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, grafique esta situación.

   a) $A = (1, 1); B = (-2, -3); C = (4, 5)$
   b) $A = (0, 1); B = (-2, 0); C = (-2, 1)$
   c) $A = (-4, -1); B = (1, 2); C = (4, 2, 5)$
   d) $A = (-2, 0); B = (-5, 3); C = (6, -2)$



a) b)

Figura 2.4: Dirección de un vector: a) Dirección en el plano b) Dirección en el espacio

2.3 Dirección de un vector

Para un vector **U** en el plano, la dirección de **U** se define como el ángulo medido desde el eje positivo de la x en el sentido contrario al giro de la manecillas de reloj, hasta el vector mismo. Ver Figura 2.4 a).
Si θ es la dirección del vector **U**, entonces $0 \leq \theta \leq 360°$ si θ se mide en grados, o $0 \leq \theta \leq 2\pi$ si θ se mide en radianes. A θ se le llama también **ángulo director** del vector **U**.

Para un vector **U** en el espacio, la dirección de **U** se define tomando los ángulos del vector con respecto a cada uno de los ejes positivos coordenados x, y e z, siendo α, β y γ las medidas de estos ángulos respectivamente, a estos ángulos se le llama los **ángulos directores** del vector. Ver Figura 2.4 b).

Si α, β y γ son los ángulos directores de un vector **U**, entonces:

$$0° \leq \alpha \leq 180°$$
$$0° \leq \beta \leq 180°$$
$$0° \leq \gamma \leq 180°$$

Si los ángulos directores se miden en grados.
Una expresión análoga puede conseguirse para el caso en el cual los ángulos directores se midan en radianes.

Los cosenos directores del vector **U** se definen como $cos\alpha$, $cos\beta$ y $cos\gamma$. Si $\mathbf{U} = \langle x, y, z \rangle$ entonces,

$$cos\alpha = \frac{x}{\|\mathbf{U}\|} \quad cos\beta = \frac{y}{\|\mathbf{U}\|} \quad cos\gamma = \frac{z}{\|\mathbf{U}\|} \tag{2.3.1}$$

Notemos que los cosenos directores cumplen la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}(cos\alpha)^2 + (cos\beta)^2 + (cos\gamma)^2 &= (\frac{x}{\|\mathbf{U}\|})^2 + (\frac{y}{\|\mathbf{U}\|})^2 + (\frac{z}{\|\mathbf{U}\|})^2 \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2}{\|\mathbf{U}\|^2} \\ &= \frac{\|\mathbf{U}\|^2}{\|\mathbf{U}\|^2} = 1\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$(cos\alpha)^2 + (cos\beta)^2 + (cos\gamma)^2 = 1 \tag{2.3.2}$$

La ecuación 2.3.2 da una condición para las ángulos directores, esto significa que tres ángulos cualesquiera entre 0° y 180° son los ángulos directores de algún vector en el espacio, si cumplen la ecuación 2.3.2.

Ejemplo 2.3.1 *Para $\boldsymbol{U}$ un vector del plano con magnitud $\|\boldsymbol{U}\|$ y dirección θ, conseguir las coordenadas del vector $\boldsymbol{U}$.*

Solución

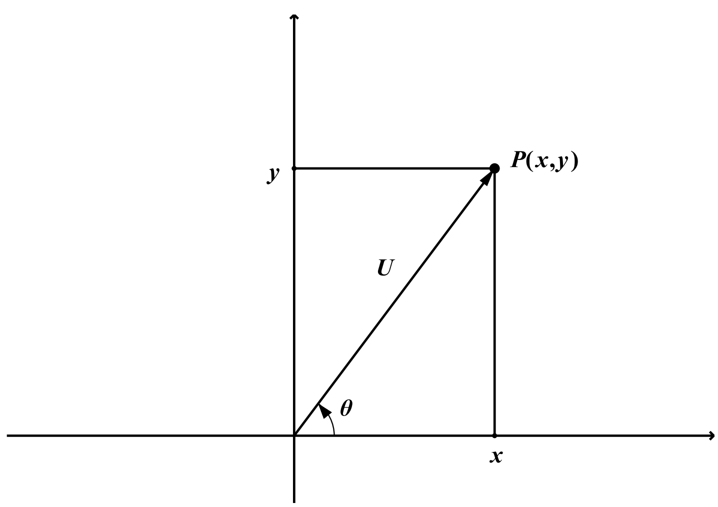


Figura 2.5: Coordenadas de un vector en términos de la magnitud y la dirección

Supongamos que $\mathbf{U} = \langle x, y\rangle$ es un vector del plano (ver Figura 2.5), si θ es la dirección de $\mathbf{U}$ entonces:

$$cos\theta = \frac{x}{\|\mathbf{U}\|} \quad \text{y} \quad sen\theta = \frac{y}{\|\mathbf{U}\|}$$

de donde,

$$x = \|\mathbf{U}\| cos\theta \quad \text{y} \quad y = \|\mathbf{U}\| sen\theta \tag{2.3.3}$$

Las ecuaciones 2.3.3 permiten trasformar a coordenadas cartesianas un vector que se encuentre determinado geométricamente, es decir, cuando está determinado por su magnitud y dirección. Así por ejemplo, si el vector **U** tiene magnitud $\|\mathbf{U}\| = 4$ y dirección $\theta = 30°$, entonces las coordenadas cartesianas del vector **U** están dadas por:

$$\mathbf{U} = \langle \|\mathbf{U}\| cos(\theta), \|\mathbf{U}\| sen(\theta) \rangle = \langle 4cos(30), 4sen(30) \rangle = \langle \frac{4\sqrt{3}}{2}, 4\frac{1}{2} \rangle = \langle 2\sqrt{3}, 2 \rangle$$

Ejemplo 2.3.2 *Dado el vector $\boldsymbol{U} = \langle x, y \rangle$, hallar la dirección y la magnitud del vector $\boldsymbol{U}$.*

Solución

La magnitud del vector **U** se calcula con la definición, esto es:

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para hallar la dirección notemos en la Figura 2.5 que,

$$tan\theta = \frac{y}{x}$$

luego,

$$\theta = tan^{-1}(\frac{y}{x}) \tag{2.3.4}$$

pero hay que tener en cuenta el cuadrante en el cual se encuentra el vector.
Si el vector $\mathbf{U} = \langle -3, 1 \rangle$, entonces:

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

Para hallar la dirección usamos la ecuación para el ángulo 2.3.4 teniendo en cuenta el cuadrante, esto es:

$$\theta = tan^{-1}(\frac{y}{x}) = tan^{-1}(\frac{1}{-3})$$

De la ecuación anterior se obtiene que $\theta \in \{161{,}57°, 341{,}57°\}$, ya que la tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante. Ahora, como el vector está ubicado en el segundo cuadrante, la dirección del vector es la correspondiente al segundo cuadrante, en este caso $\theta = 161{,}57°$ o su equivalente en radianes.

Observaciones

1. Dos vectores son iguales si son iguales en magnitud y en dirección, desde el punto de vista geométrico.

2. Dos vectores son iguales si sus correspondientes componentes son iguales, desde el punto de vista coordenado.

3. El ángulo entre dos vectores se define como el ángulo más pequeño entre ellos, este ángulo varía entre 0 y 180 grados o su equivalente en radianes. Ver Figura 2.6.

4. Dos vectores son ortogonales si el ángulo entre ellos es 90° (o $\frac{\pi}{2}$ rad).

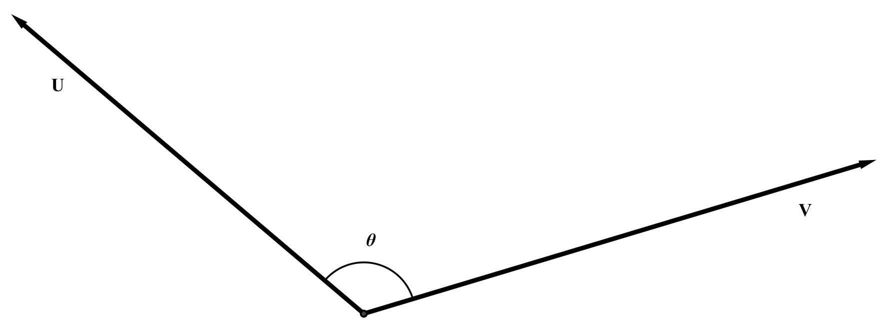


Figura 2.6: Ángulo entre dos vectores

Ejercicios Sección 2.3.1

1. Hallar la dirección de los siguientes vectores:

   a) $A = \langle 4, -2 \rangle$
   b) $B = \langle 3, 0 \rangle$
   c) $C = \langle 0, 8 \rangle$
   d) $A = \langle 3, 0, 1 \rangle$
   e) $B = \langle 3, -2, 1 \rangle$
   f) $B = \langle -3, -2, -5 \rangle$
   g) $B = \langle 0, -2, -4 \rangle$
   h) $B = \langle -1, 0, -5 \rangle$

2. Dos de los ángulos directores de un vector son $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Hallar el otro ángulo director.

3. Hallar los cosenos y los ángulos directores de los siguientes vectores

   a) $A = \langle 3, 1, -2 \rangle$
   b) $B = \langle -4, -6, -7 \rangle$
   c) $C = \langle -5, 3, 0 \rangle$
   d) $D = \langle -5, 0, 1 \rangle$
   e) $F = \langle 0, 0, -5 \rangle$
   f) $G = \langle 1, 1, 1 \rangle$
   g) $A = \langle a, a, a \rangle$, $a < 0$

4. ¿Es posible que los ángulos $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ y $\gamma = \frac{\pi}{4}$ sean los ángulos directores de algún vector en el espacio?

5. Si el vector $U = \langle x, y, z \rangle$ está ubicado en el plano xy, su longitud es 4 y forma un ángulo de 60° con el eje positivo de y. Hallar las coordenadas de U y hacer un gráfico de la situación.

6. Si el vector $V = \langle x, y, z \rangle$ está ubicado en el plano xz, su longitud es 3 y forma un ángulo de 30° con el eje positivo de x. Hallar las coordenadas de V y hacer un gráfico de la situación.

7. Hallar la dirección de los siguientes vectores

   a) $\overrightarrow{AB}$, donde $A = (0, 1)$ y $B = (-4, 2)$
   b) $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (-2, 0)$ y $Q = (0, -6)$
   c) $\overrightarrow{MN}$, donde $M(-2, -3)$ y $N(3, 2)$
   d) $\overrightarrow{AB}$, donde $A(2, 5, -1)$ y $B(3, 2, 1)$
   e) $\overrightarrow{CD}$, donde $C(3, 0, -1)$ y $D(0, -2, 4)$
   f) $\overrightarrow{QP}$, donde $P(0, 1, -1)$ y $Q(3, 7, 0)$

2.4 Operaciones con vectores

En $\mathbb{R}^n$ se definen varias operaciones con vectores como son: el producto entre un escalar y un vector, la suma entre vectores, el producto escalar o interno y el producto vectorial (este ultimo sólo para $n = 3$) como los más importantes. A continuación veremos con un poco de detalle cada una de estas operaciones.

2.4.1 Producto por escalar

Sean un vector $\mathbf{U} = \langle u_1, ..., u_n \rangle$ de $\mathbb{R}^n$, y un escalar α de $\mathbb{R}$, se define el producto por escalar del vector $\mathbf{U}$ y el escalar α como:

$$\alpha \mathbf{U} = \langle \alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n \rangle$$

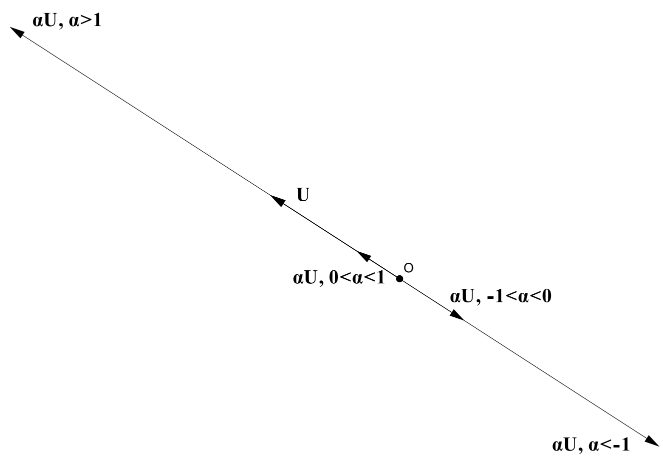


Figura 2.7: Efectos del producto escalar

Efectos del producto por escalar

El producto por escalar produce alargamientos o contracciones sobre el vector **U**, estos dependen del escalar que interviene en la operación. Ver Figura 2.7, esto es:

1. Si $\alpha > 1$, entonces el vector $\alpha\mathbf{U}$ tiene magnitud o norma mayor que la norma de **U** y conserva la dirección de **U**.

2. Si $0 < \alpha < 1$, entonces el vector $\alpha\mathbf{U}$ tiene magnitud o norma menor que la norma de **U** y conserva la dirección de **U**.

3. Si $-1 < \alpha < 0$, entonces el vector $\alpha\mathbf{U}$ tiene magnitud o norma menor que la norma de **U** y dirección contraria a la de **U**.

4. Si $\alpha < -1$, entonces el vector $\alpha\mathbf{U}$ tiene magnitud o norma mayor que la norma de **U** y dirección contraria a la de **U**.

Ejemplo 2.4.1 *Dados el vector $\boldsymbol{U} = \langle -1, 2, 4\rangle$ y el escalar $\alpha = 7$ encontrar el producto $\alpha\boldsymbol{U}$, un vector unitario en la dirección del vector $\boldsymbol{U}$ y un vector con magnitud* 10 *unidades con dirección contraria a la de $\boldsymbol{U}$.*

Solución

De acuerdo con la definición que se dió de producto por escalar, tenemos:

$$7\,\boldsymbol{U} = \langle 7(-1), 7(2), 7(4)\rangle = \langle -7, 14, 28\rangle$$

Un vector unitario en la dirección del vector **U** se consigue con la expresión:

$$u_{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|}$$

.
Así, el vector unitario es:

$$u_{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2}} \langle -1, 2, 4 \rangle = \frac{1}{\sqrt{21}} \langle -1, 2, 4 \rangle$$

A este último se le conoce como el vector normalizado de **U**, o la normalización del vector **U**.

Para conseguir un vector de longitud 10 unidades con dirección contraria de **U**, basta multiplicar por 10 el vector unitario encontrado y cambiar su dirección, esto equivale a multiplicar por -1, es decir, el vector se consigue multiplicando el vector unitario por -10, esto es,

$$-10u_{\mathbf{U}} = -10\frac{1}{\sqrt{21}} \langle -1, 2, 4 \rangle = \frac{-10}{\sqrt{21}} \langle -1, 2, 4 \rangle$$

Propiedades del producto por escalar

Sean **U** y **V** dos vectores de $\mathbb{R}^n$, α y β dos escalares cualesquiera. Entonces:

1. $\alpha\mathbf{U}$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$.
2. $1\ \mathbf{U} = \mathbf{U}$.
3. $(\alpha\beta)\mathbf{U} = \alpha(\beta\mathbf{U}) = \beta(\alpha\mathbf{U})$.
4. $\alpha(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \alpha\mathbf{U} + \alpha\mathbf{V}$.
5. $(\alpha + \beta)\mathbf{U} = \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{U}$.

2.4.2 Suma de vectores

Dados dos vectores **U** y **V** de $\mathbb{R}^n$, se define la suma de **U** y **V** como sigue:

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n \rangle$$

Gráficamente podemos representar la suma de vectores como en la Figura 2.8.

Notemos que la suma se da componente a componente, y el vector suma es también un vector de $\mathbb{R}^n$.

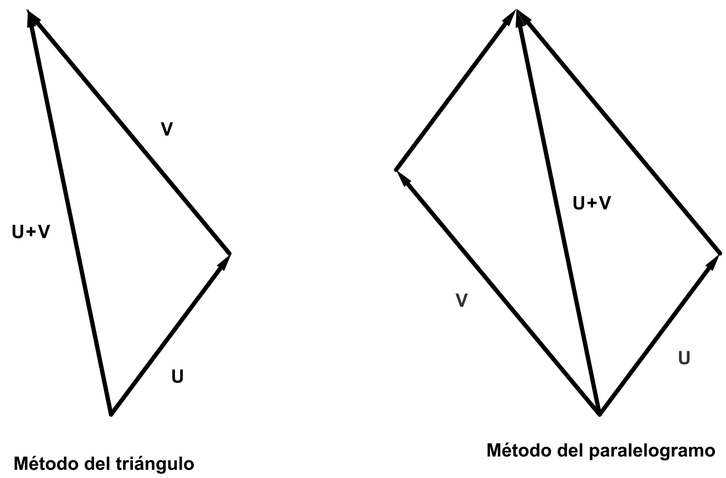


Figura 2.8: Suma de vectores: métodos del paralelogramo y del triángulo

Usando la operación producto por escalar, podemos definir la resta a partir de la suma, como sigue:

$$\mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{U} + (-\mathbf{V}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, ..., u_n - v_n \rangle$$

Ejemplo 2.4.2 *Dados los vectores* $\boldsymbol{U} = \langle 2, 4, 6, 8 \rangle$ *y* $\boldsymbol{V} = \langle -1, -3, 6, 8 \rangle$ *de* $\mathbb{R}^n$*. Hallar*

1. $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$
2. $3\boldsymbol{U} + \frac{2}{3}\boldsymbol{V}$
3. $\boldsymbol{V} - 4\boldsymbol{U} - (2\boldsymbol{U} + 8\boldsymbol{V})$

Solución

1. $\mathbf{U} + \mathbf{V} = \langle 2, 4, 6, 8 \rangle + \langle -1, -3, 6, 8 \rangle = \langle 2 - 1, 4 - 3, 6 + 6, 8 + 8 \rangle = \langle 1, 1, 12, 16 \rangle$
2. $3\mathbf{U} + \frac{2}{3}\mathbf{V} = 3\langle 2, 4, 6, 8 \rangle + \frac{2}{3}\langle -1, -3, 6, 8 \rangle = \langle 6, 12, 18, 24 \rangle + \frac{2}{3}\langle \frac{-2}{3}, \frac{-6}{3}, \frac{12}{3}, \frac{16}{3} \rangle$
3. Eliminando los signos de agrupación y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} - 4\mathbf{U} - (2\mathbf{U} + 8\mathbf{V}) &= \mathbf{V} - 4\mathbf{U} - 2\mathbf{U} - 8\mathbf{V} = -7\mathbf{V} - 6\mathbf{U} \\ &= -7\langle -1, -3, 6, 8 \rangle - 6\langle 2, 4, 6, 8 \rangle \\ &= \langle 7, 21, -42, -56 \rangle + \langle -12, -24, -36, -48 \rangle \\ &= \langle -5, -3, -78, -104 \rangle \end{aligned}$$

Propiedades de la suma de vectores

Dados $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces:

1. $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$
2. $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \mathbf{V}+\mathbf{U}$
3. $(\mathbf{U}+\mathbf{V})+\mathbf{W} = \mathbf{U}+(\mathbf{V}+\mathbf{W})$
4. $\mathbf{U}+\mathbf{O} = \mathbf{O}+\mathbf{U}$, donde el vector $\mathbf{O} = \langle 0, 0, \cdots, 0\rangle$ es el único con esta propiedad
5. $\mathbf{U}+(-\mathbf{U}) = (-\mathbf{U})+\mathbf{U} = \mathbf{O}$, a $-\mathbf{U}$ se le llama el inverso aditivo de $\mathbf{U}$, y es el único con esta propiedad.

Observaciones

- **Definición de espacio vectorial (ver [2]).** Un espacio vectorial V sobre un campo K es un conjunto de objetos que pueden ser sumados y multiplicados por elementos de K, de tal forma que la suma dos elementos de V es un elemento de V, el producto de un elemento de V por un elemento de K es un elemento de V, y las propiedades de la suma y del producto por escalar son satisfechas.

- Un espacio vectorial real V es un conjunto en el que los elementos son llamados vectores, en este espacio los números reales son llamados escalares, y hay definidas dos operaciones llamadas *suma o adición* y *múltiplicación de un vector por un escalar.* Estas operaciones se definen de tal manera que se cumplen las propiedades antes descritas para la suma y el producto por un escalar respectivamente.

- El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ con las operaciones **producto por escalar** y **suma**, forma lo reconoceremos como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

- Si $v_1, ..., v_m$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_m$ son números reales (escalares). Una expresión del tipo
$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \tag{2.4.1}$$
es llamada una **combinacion lineal** de $v_1, ..., v_m$ [2].

- Dado un conjunto finito de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_m$, se dice que estos vectores son linealmente independientes si existen números $a_1, a_2, \cdots, a_m$, donde la ecuación:
$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0$$
se satisface únicamente cuando $a_1, a_2, \cdots, a_m$ son todos cero. En caso contrario, se dice que son linealmente dependientes [5]. Es decir, un conjunto de vectores se dice ser linealmente independiente si ninguno de ellos puede ser escrito como una combinación lineal de los restantes.

Consideremos un vector cualesquiera $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2 \rangle$ del plano ($\mathbb{R}^2$), en virtud del las operaciones del producto por un escalar y suma, podemos escribir;

$$\mathbf{U} = \langle u_1, u_2 \rangle = u_1 \langle 1, 0 \rangle + u_2 \langle 0, 1 \rangle$$

Notemos que los vectores $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ son unitarios y también ortogonales [3], son linealmente independientes. Dado que cualquier vector del plano se puede escribir como combinación lineal de estos dos vectores, a estos dos vectores se les llama **base canónica** del plano y en general se notan como:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad y \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Asi,

$$\mathbf{U} = \langle u_1, u_2 \rangle = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$$

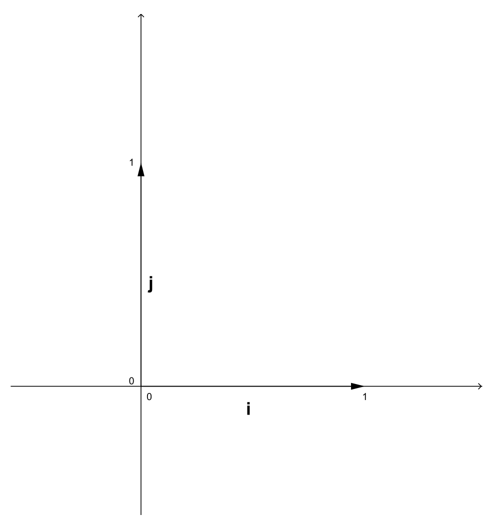


Figura 2.9: Base canónica

Observación

En general, la idea de base obliga a que el número de vectores en cuestión debe ser igual al que indica el espacio, y además deben ser linealmente independientes. En el caso de la base canónica la independencia lineal se verifica fácilmente, ya que los vectores no están sobre la misma línea, como se muestra en la Figura 2.9.

La base canónica exibida no es la única base que puede generar[4] a los elementos del plano, dos vectores cualesquiera del plano linealmente independientes (que no están

[3] Recordar que: dos vectores son ortogonales si el ángulo entre ellos es 90° (o $\pi/2$).

[4] Un vector v de $\mathbb{R}^n$ es generado por el subconjunto $\{v_1, ..., v_m\}$ de $\mathbb{R}^n$, si v puede ser escrito como combinación lineal de $v_1, ..., v_m$.

sobre la misma línea) también pueden generar a cualquier vector del plano, vamos a verificar esto.
Sea $\mathbf{W} = \langle w_1, w_2\rangle$ un vector cualquiera del plano, y consideremos a $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2\rangle$ y a $\mathbf{V} = \langle v_1, v_2\rangle$ dos vectores linealmente independientes del plano, veamos que **U** y **V** constituyen una base para el plano.
Para que los vectores **U** y **V** constituyan una base para el plano "*deben existir escalares α y β ambos diferentes de cero tales que* ***W*** *se pueda escribir como la siguiente* ***combinación lineal***".

$$\mathbf{W} = \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{V}$$

Esta última afirmación se conoce como el **Teorema de la base** y está representado en la siguiente gráfica:

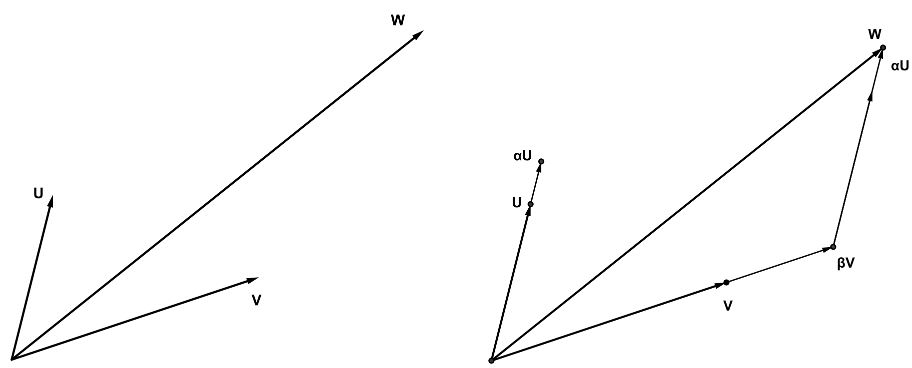


Figura 2.10: Teorema de la base

Ejemplo 2.4.3 *Considere el conjunto de vectores $B = \{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}\}$, donde $\boldsymbol{U} = \langle -2, 3\rangle$ y $\boldsymbol{V} = \langle 1, -5\rangle$. Muestre que el conjunto B conforma una base para el plano y encuentre escalares α y β tales que el vector $\boldsymbol{W} = \langle 3, 4\rangle$ se pueda escribir como combinación lineal de* ***U*** *y* ***V****.*

Solución

Para probar que **U** y **V** conforman una base para el plano es suficiente ver que no están sobre la misma recta, esto significa probar que no son paralelos, veamos.
Supongamos que **U** y **V** son paralelos, esto es existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathbf{U} = \lambda\mathbf{V}$$

esto es

$$\langle -2, 3\rangle = \lambda\langle 1, -5\rangle$$

por tanto, el producto por escalar y la igualdad de vectores justifica que:

$$-2 = \lambda \ \text{ y } 3 = -5\lambda$$

de donde

$$-2 = \lambda \ \text{ y } \lambda = \frac{-3}{5}$$

lo anterior constituye una contradicción. Esto significa que la suposicicón de paralelismo es falsa. Así, lo cierto es que los vectores no son paralelos y por tanto constituyen una base para el plano.

Para encontrar los escalares α y β utilizamos la igualdad de vectores, la suma y el producto por escalar, como sigue:

$$\mathbf{W} = \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{V},$$

de donde,

$$\begin{aligned} \langle 3, 4\rangle &= \alpha\langle -2, 3\rangle + \beta\langle 1, -5\rangle \\ &= \langle -2\alpha + \beta, 3\alpha - 5\beta\rangle, \end{aligned}$$

de la igualdad de vectores tenemos el siguiente sistema de acuaciones:

$$\begin{aligned} 3 &= -2\alpha + \beta \\ 4 &= 3\alpha - 5\beta \end{aligned}$$

que tiene solución $\alpha = \frac{-19}{7}$ y $\beta = \frac{-17}{7}$, estos son los escalares que se necesitan para que se de la combinación lineal.

División de un segmento en una razón dada

Ya habiamos visto en el capítulo anterior que dado un punto en el interior de un segmento $\overline{AB}$, este lo parte en una razón r dada. Veremos ahora una versión de este mismo teorema que mostraremos usando la suma de vectores y el producto de un vector por escalar.
Consideremos el segmento $\overline{AB}$, O un punto cualquiera de referencia, X un punto interior sobre el segmento $\overline{AB}$ y $\alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$. Si el punto X divide el segmento $\overline{AB}$ en la razón $\frac{\alpha}{\beta}$, entonces:

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OB} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OA}. \tag{2.4.2}$$

Usaremos la suma de vectores y el producto de un vector por escalar para ver que la ecuación vectorial anterior es cierta, veamos esto:

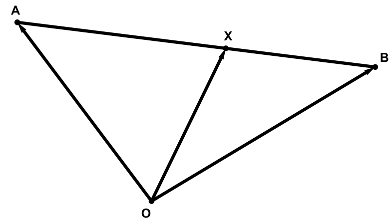


Figura 2.11: División de un segmento en una razón dada

Sabemos que $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{XB}$ son vectores paralelos y además que $\frac{|\overrightarrow{AX}|}{|\overrightarrow{XB}|} = \frac{\alpha}{\beta}$. De las afirmaciones anteriores podemos concluir que:

$$\overrightarrow{AX} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{XB}$$

de donde

$$\beta\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{XB}$$

Ahora, notemos que el vector $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}$ y el vector $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB}$, reemplazando en la ecuación anterior tenemos que:

$$\beta(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}) = \alpha(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB})$$
$$\beta\overrightarrow{AO} + \beta\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{XO} + \alpha\overrightarrow{OB}$$

por tanto

$$\beta\overrightarrow{OX} - \alpha\overrightarrow{XO} = \alpha\overrightarrow{OB} - \beta\overrightarrow{AO}$$

Como $\overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{XO}$ y $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$, tenemos:

$$\beta\overrightarrow{OX} + \alpha\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OA}$$

De la expresión anterior podemos despejar $\overrightarrow{OX}$, para obtener que:

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} \tag{2.4.3}$$

Ejemplo 2.4.4 *Hallar el punto P en el segmento $\overrightarrow{AB}$ que dista del punto A los $3/4$ de la distancia de A hasta B, donde los puntos son $A(2,-3,4)$ y $B(2,5,-1)$ del espacio.*

Solución
Un bosquejo del problema es el siguiente:

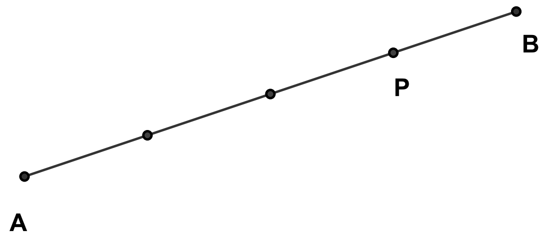


Figura 2.12: Proporción de 3:1

Debemos ver en la Figura 2.12 que como la partición fue hecha comparando uno de los segmentos pequeños ($\overline{AP}$) con el segmento grande ($\overline{AB}$), entonces el punto P está ubicado en los 3/4 del segmento $\overline{AB}$, sin embargo la proporción entre los segmentos AP y PB de 3 a 1 o simplemente de 3. Con esto en mente el teorema con $\alpha = 3$ y $\beta = 1$ para hallar el punto P queda:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{3+1}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3+1}\overrightarrow{OA}$$

Así, si $P = (x, y, z)$, entonces,

$$\begin{aligned} < x, y, z > &= \tfrac{3}{4} < 2, 5, -1 > + \tfrac{1}{4} < 2, -3, 4 > \\ &=< \tfrac{8}{4}, \tfrac{12}{4}, \tfrac{1}{4} > \end{aligned}$$

luego el punto pedido es $P = (\frac{8}{4}, \frac{12}{4}, \frac{1}{4})$

2.4.3 Producto escalar

Dados dos vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar entre $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, se define como:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

Note que el producto escalar de vectores da como resultado un escalar, **no un vector**.

Ejemplo 2.4.5 *Calcule el producto escalar de los vectores* $\boldsymbol{U} = \langle -5, 8, -4, 7, 6\rangle$ *y* $\boldsymbol{V} = \langle 3, -8, 1, 6, -7\rangle$.

Solución

De acuerdo con la definición de producto escalar, se tiene:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \langle -5, 8, -4, 7, 6\rangle \cdot \langle 3, -8, 1, 6, -7\rangle = -15 - 64 - 4 + 42 - 42 = -83$$

También se puede definir el producto escalar en términos de la magnitud de los vectores y el ángulo entre ellos, de la siguiente manera:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \|\mathbf{U}\|\|\mathbf{V}\| cos\theta \tag{2.4.4}$$

en donde θ se mide como el ángulo más pequeño entre los vectores **U** y **V**. Ver Figura 2.6. Despejando de la ecuación 2.4.4 a $\cos\theta$ se puede conseguir el ángulo entre los vectores, como sigue:

$$\cos\theta = \frac{U \cdot V}{\|U\|\|V\|}$$

Así, el ángulo entre los vectores del ejemplo anterior se calcula con la fórmula anterior. Primero calculemos las magnitudes de los vectores, esto es:

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{25 + 64 + 16 + 49 + 36} = \sqrt{190}$$

y

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{9 + 64 + 1 + 36 + 49} = \sqrt{159}$$

con eso

$$cos\theta = \frac{-83}{\sqrt{190}\sqrt{159}} = -0{,}4775$$

entonces

$$\theta = cos^{-1}(-0{,}4775) = 118{,}52°$$

Propiedades del producto escalar

Sean **U**, **V** y **W** vectores de $\mathbb{R}^n$ y α en $\mathbb{R}$. Entonces:

1. $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ está en $\mathbb{R}$
2. $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}$
3. $\alpha(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = (\alpha\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot (\alpha\mathbf{V})$
4. $\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{W}$
5. $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \geq 0$, ($\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = 0$ si y sólo si $\mathbf{U} = 0$)

Observaciones

1. $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W}$ no implica $\mathbf{V} = \mathbf{W}$. Note que:

$$10 = \langle 2, 1\rangle \cdot \langle 6, -2\rangle = \langle 2, 1\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle = 10,$$

   y $\langle 6, -2\rangle \neq \langle 4, 2\rangle$

2. $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$ no implica $\mathbf{U} = 0$ o $\mathbf{V} = 0$ (tome $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ ortogonales).

2.4.4 Proyección vectorial

Sean $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, se define la proyección vectorial del vector $\mathbf{U}$ sobre el vector $\mathbf{V}$ como:

$$Proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U} = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|^2} \cdot \mathbf{V}$$

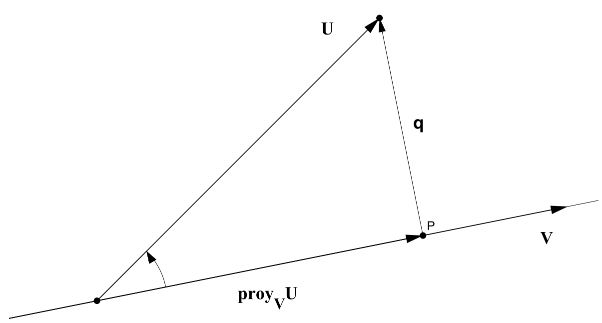


Figura 2.13: Proyección vectorial

Gráficamente, el vector $Proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U}$ es un vector paralelo a $\mathbf{V}$, y define un vector q perpendicular a $\mathbf{V}$, como muestra la Figura 2.13.
De la fórmula para calcular la proyección vectorial, se tiene:

$$Proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U} = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|^2} \cdot v = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|} \cdot \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$$

Es decir, se puede escribir el vector proyección como el producto del escalar $\dfrac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$ por el vector unitario $\dfrac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$. Al escalar $\dfrac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$ se le llama la componente escalar del vector $\mathbf{U}$ sobre el vector $\mathbf{V}$ y se denota con:

$$Comp_V\mathbf{U} = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$$

El escalar que determina $\dfrac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$ puede ser positivo o negativo, y este signo indica si el ángulo entre los vectores está entre 0 y 90° o si está entre 90° y 180°, respectivamente. En el primer caso (signo positivo), el vector proyección está en la misma dirección que $\mathbf{V}$; en el segundo caso, el vector proyección está en la dirección contraria de $\mathbf{V}$. Ver Figura 2.14

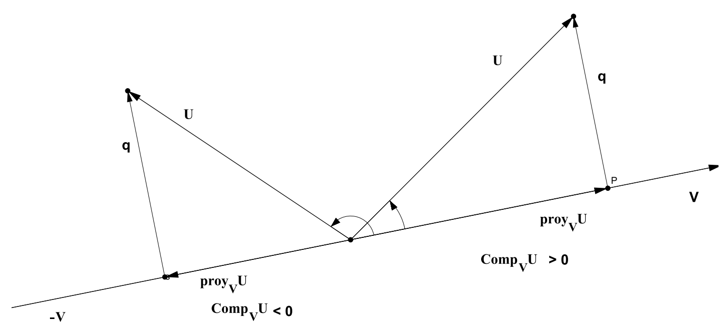


Figura 2.14: Componentes

Ejemplo 2.4.6 *Dados los vectores* $\boldsymbol{U} = \langle -1, 2, -3\rangle$ *y* $\boldsymbol{V} = \langle 2, -1, 1\rangle$. *Hallar vectores* p *y* q *tales que* $p \parallel V$, $q \perp v$ *y que cumplan* $p + q = U$.

Solución

De la Figura 2.14 podemos hacer que $p = Proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U}$ y q el vector perpendicular en la gráfica, se tiene entonces:

$$p = Proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U} = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|\|\mathbf{V}\|}\cdot\mathbf{V}$$

como $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = -7$ y $\|\mathbf{V}\|^2 = \mathbf{V}\cdot\mathbf{V} = 6$, entonces,

$$p = \frac{-7}{6}\cdot\langle 2, -1, 1\rangle$$

Para conseguir q notemos en la Figura 2.13 que $Proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U} + q = p + q = \mathbf{U}$ de donde $q = \mathbf{U} - p$, esto es:

$$
\begin{aligned}
q &= \langle -1, 2, -3\rangle - \frac{-7}{6}\cdot\langle 2, -1, 1\rangle \\
&= \frac{1}{6}\langle 1, 5, -11\rangle
\end{aligned}
$$

2.4.5 Producto vectorial

Dados los vectores $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ del espacio, el producto vectorial entre $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ se define como:

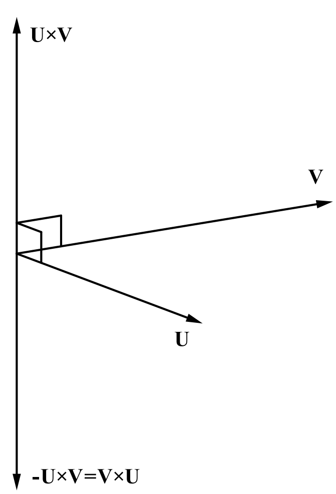
$$
\mathbf{U}\times\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3)\mathbf{i} - (u_1v_3 - v_1u_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - v_1u_2)\mathbf{k}
$$

Observaciones

1. Los vectores $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ constituyen una base para el espacio $\mathbb{R}^3$. Estos son vectores unitarios en la direcciones positivas de x , y y z respectivamente, en nuestra notación el vector producto vectorial se puede escribir como:

$$
\mathbf{U}\times\mathbf{V} = \langle (u_2v_3 - v_2u_3), -((u_1v_3 - v_1u_3)), (u_1v_2 - v_1u_2)\rangle
$$

2. El producto vectorial define un vector que es al mismo tiempo perpendicular a los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$. Ver Figura 2.15.



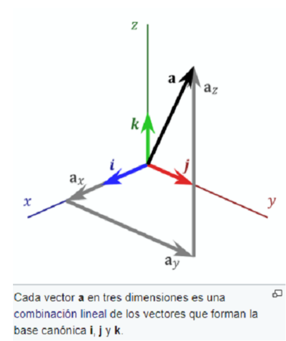


Figura 2.15: Producto vectorial

3. La magnitud del producto vectorial se puede definir también como:

$$\|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\| = \|\mathbf{U}\|\|\mathbf{V}\| sen(\theta),$$

donde θ define el ángulo entre los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$.

4. De la forma como se define la magnitud, se observa, que si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son no nulos y $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$, entonces la magnitud del vector producto vectorial es cero, y viceversa, si la magnitud del vector producto vectorial es cero, entonces el ángulo entre los vectores es cero o 180°. Este hecho, constituye una caracterización del producto vectorial que indica cuándo los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son parelelos. Podemos resumir este hecho así:

$$\mathbf{U} \parallel \mathbf{V} \Longleftrightarrow \mathbf{U} \times \mathbf{V} = 0$$

5. Geométricamente, el vector $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ también define un paralelogramo con lados $\|\mathbf{U}\|$ y $\|\mathbf{V}\|$, que tiene área dada por $A = \|\mathbf{U} \times \mathbf{U}\|$ (Ver Figura 2.16).

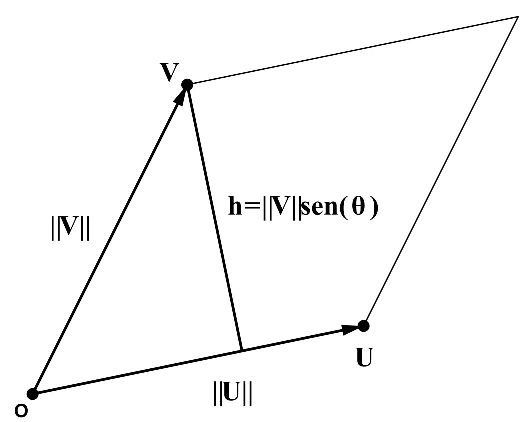


Figura 2.16: Área

6. El producto vectorial no es conmutativo, en este caso se cumple.

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\mathbf{V} \times \mathbf{U}$$

Ejercicio

Consultar y verificar para algunos vectores particulares del espacio, las propiedades del producto vectorial y del producto escalar.

Ejemplo 2.4.7 *Dados los puntos* $A = (5, 2, 3)$ *y* $B = (-1, 3, -3)$ *y el origen* O*, hallar el área del paralelogramo determinado por* OA *y* OB*.*

Solución

Definamos los vectores $\mathbf{U} = OA = \mathbf{A} - \mathbf{O} = \langle 5, 2, 3 \rangle$ y el vector $\mathbf{V} = OB = \mathbf{B} - \mathbf{O} = \langle -1, 3, -3 \rangle$, entonces el área del paralelogramo queda determinada por $\|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\|$, esto es:

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (-15 - 9)\mathbf{i} - (-15 + 3)\mathbf{j} + (15 + 5)\mathbf{k} = -24\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$$

Entonces el área del paralelogramo es:

$$\textbf{Área} = \|\mathbf{U} \times \mathbf{V}\| = \sqrt{(-24)^2 + (-12)^2 + 20^2} = \sqrt{1120}\ U^2$$

Triple producto escalar

Sean los vectores $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{V} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\mathbf{W} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ el triple producto escalar de los vectores $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ se define:

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El triple producto escalar se define como el determinante anterior, esto quiere decir que hereda muchas de las propiedades de los determinantes; una de ellas dice que una permutación de filas o columnas implica un cambio de signo en el valor del determinante. Por esta razón, el triple producto escalar no es conmutativo.

Observaciones

1. **Puntos coplanares**: Cuatro o más puntos son coplanares si existe un plano que los contenga.

2. **Vectores coplanares**: Dos o más vectores son coplanares si existe un plano que los contenga.

3. Geométricamente el triple producto escalar define un sólido (paralelepípedo), el volúmen de este sólido está dado por (Ver Figura 2.17):

$$\textbf{Volúmen} = |\mathbf{U} \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}|$$

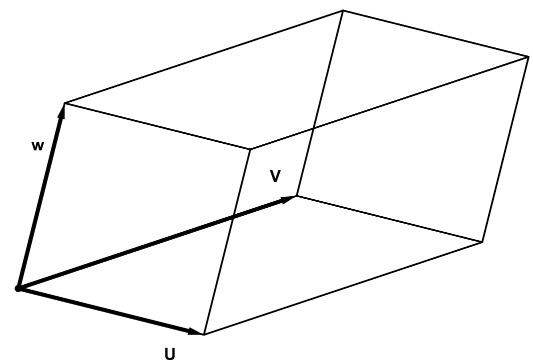


Figura 2.17: Representación geométrica triple producto escalar

4. Las observaciones anteriores permiten una caracterización de cuando tres vectores o cuatro puntos son coplanares, esta es la siguiente:

$$\mathbf{U}, \mathbf{V} \ \text{ y } \ \mathbf{W} \ \text{ son coplanares } \ \Leftrightarrow (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} = 0$$

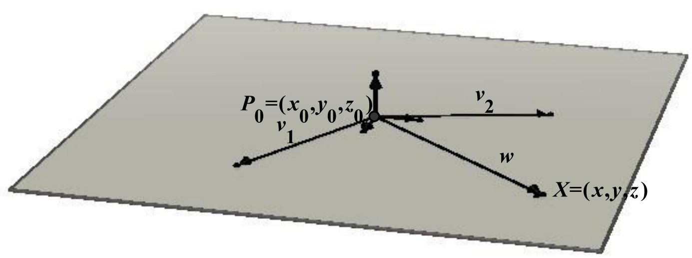


Figura 2.18: Vectores y puntos coplanares

Propiedades del producto vectorial

Sea $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son vectores del espacio y c es un escalar, entonces:

1. $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\mathbf{V} \times \mathbf{U}$
2. $(c\mathbf{U}) \times \mathbf{V} = c(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \mathbf{U} \times (c\mathbf{V})$
3. $\mathbf{U} \times (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \mathbf{U} \times \mathbf{V} + \mathbf{U} \times \mathbf{W}$

4. $(\mathbf{V} + \mathbf{W}) \times \mathbf{U} = \mathbf{V} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} \times \mathbf{U}$

5. $\mathbf{V} \times (\mathbf{W} \times \mathbf{U}) = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{U})\mathbf{W} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})\mathbf{U}$

Ejemplo 2.4.8 *Dados los puntos $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 1, -2)$, $C(4, 2, -1)$ y $D(-1, 0, 1)$ del espacio. Verifique si los puntos son coplanares, y en caso de que no sean coplanares, hallar el volúmen del tetraedro determinado.*

Solución

Como tenemos un criterio de "coplanares", en términos de vectores, y la pregunta está hecha en términos de puntos, debemos construir los vectores; conviene que sea con origen en el mismo punto, digamos que tal punto es A, sean u, v y v definidos como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}= B - A; & \mathbf{V}= C - A; & \mathbf{W}= D - A \\ \mathbf{U}= \langle -2, -1, 1\rangle; & \mathbf{V}= \langle 3, 0, 2\rangle; & \mathbf{W}= \langle -2, -2, 4\rangle \end{array}$$

con eso:

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2(0 - (-4)) + 1(12 + 4) + 1(-6 - 0) = 2$$

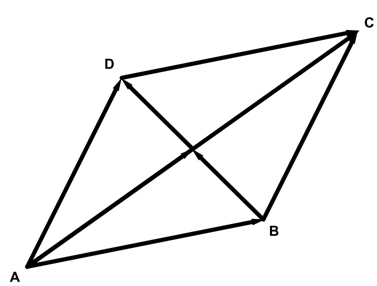
El resultado anterior indica que los vectores no son coplanares, ya que es diferente de cero; el valor absoluto de este resultado determina el volúmen del paralelepípedo, el volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelpípedo, luego:

$$\textbf{Volúmen tetraedro} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ u^3$$

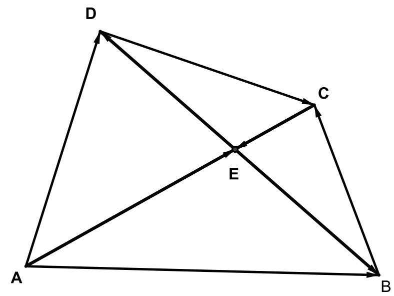
Ejercicios Sección 2.4.1

1. Qué relación hay entre el punto $(-1, 2)$ y el vector $\langle -1, 2\rangle$.

2. Identifique los vectores iguales en el siguiente paralelogramo:



Para los ejercicios 3-6 considere la siguiente gráfica y encuentre el vector resultante.



3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$
4. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA}$
5. $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$
6. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$
7. Demuestre mediante análisis vectorial que las alturas de un triángulo se cortan en un punto.
8. Demuestre mediante análisis vectorial que el baricentro de un triángulo divide a cada mediana en la razón 2 a 1.
9. Demostrar vectorialmente que en un triángulo isósceles las medianas trazadas a los lados congruentes son congruentes.
10. Demostrar que en un paralelogramo los segmentos que unen los puntos medios de los lados consecutivos forman un paralelogramo.

    (**Propiedad vectorial de los puntos colineales**). Sean **A**, **B** y **C** tres vectores cualesquiera diferentes comparados de a dos, entonces los correspondientes puntos A, B y C son colineales, si y sólo si existen reales α y β en $\mathbb{R}$ tales que:

$$\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OC}, \qquad \alpha + \beta = 1$$

    En los ejercicios 13 a 18, determine si los puntos son colineales usando la propiedad vectorial de los puntos colineales.

11. $A(2,1)$, $B(6,3)$ y $C(10,5)$
12. $A(2,3)$, $B(8,4)$ y $C(12,5)$
13. $A(2,3)$, $B(7,4)$ y $C(12,5)$
14. $A(2,1,1)$, $B(6,3,1)$ y $C(10,5,1)$

15. $A(1,1)$, $B(2,-3,-1)$ y $C(3,-5,4)$

16. $A(2,3,4)$, $B(4,6,8)$ y $C(10,5,20)$

17. Demuestre vectorialmente la **propiedad vectorial de los puntos colineales**.

18. En cada caso determine el vector o el escalar para los vectores $\mathbf{A} = \langle -2,3 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle 5,-3 \rangle$, $\mathbf{C} = \langle -2,-3 \rangle$

    a) $\mathbf{A}+\mathbf{C}$
    b) $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$
    c) $\mathbf{2A}-\mathbf{3C}$
    d) $\mathbf{2A}-\mathbf{3C}+\frac{1}{2}\mathbf{B}$
    e) $\|\mathbf{A}-\mathbf{C}\|$
    f) $\|\mathbf{2A}-\mathbf{3B}\|$
    g) $\|\mathbf{5A}-\mathbf{6B}\|$
    h) $\|\mathbf{A}-\mathbf{6B}\|$

19. Para los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ y $\mathbf{C} = -5\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ determine:

    a) $3\mathbf{A}+2\mathbf{C}$
    b) $-5\mathbf{A}+4\mathbf{C}-\frac{2}{3}\mathbf{B}$
    c) $\mathbf{B}-\mathbf{A}$
    d) $\|2\mathbf{B}-\mathbf{C}\|$
    e) $\|4\mathbf{A}-5\mathbf{B}+\mathbf{C}\|$
    f) $\|2\mathbf{A}\|-\|\mathbf{B}\|$
    g) $\|\mathbf{C}\|-\|\mathbf{B}\|$
    h) $\|\mathbf{C}-\mathbf{B}\|$
    i) $\mathbf{C}-\mathbf{B}$

20. Realice el producto escalar de los pares de vectores en cada caso:

    a) $A = \langle 2,-1 \rangle$ y $B = \langle 4,7 \rangle$
    b) $\mathbf{a}$ = 5$\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ y $\mathbf{b}$ = -3$\mathbf{i}$ + 6$\mathbf{j}$
    c) $\mathbf{u} = \langle 1,2,-1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0,4,-3 \rangle$
    d) $\mathbf{U}$ = 5$\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ + 6$\mathbf{k}$ y $\mathbf{V}$ = -$\mathbf{i}$ + 5$\mathbf{j}$ - 3$\mathbf{k}$
    e) $\mathbf{u} = \langle -6,0,1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0,9,8 \rangle$

21. En cada caso encuentre el ángulo entre los vectores:

    a) $A = \langle 3,-4 \rangle$ y $B = \langle 0,7 \rangle$
    b) $\mathbf{a}$ = -2$\mathbf{i}$ - 5$\mathbf{j}$ y $\mathbf{b}$ = -$\mathbf{i}$ + 3$\mathbf{j}$
    c) $\mathbf{u} = \langle -1,-2,1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0,-4,-2 \rangle$

d) $\mathbf{U}$ = -3$\mathbf{i}$ - $\mathbf{j}$ + $\mathbf{k}$ y $\mathbf{V}$ = -$\mathbf{i}$ + 2$\mathbf{j}$ - 2$\mathbf{k}$

e) $\mathbf{u} = \langle 0, 2, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 3\rangle$

22. Para los siguientes ejercicios halle $proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U}$ y un vector $\mathbf{q}$ tal que: $\mathbf{U} = proy_{\mathbf{V}}\mathbf{U} + \mathbf{q}$

    a) $\mathbf{U} = \langle 2, -1\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 4, 7\rangle$

    b) $\mathbf{U}$ = 5$\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ y $\mathbf{V}$ = -3$\mathbf{i}$ + 6$\mathbf{j}$

    c) $\mathbf{U} = \langle 1, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 0, 4, -3\rangle$

    d) $\mathbf{U}$ = 5$\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ + 6$\mathbf{k}$ y $\mathbf{V}$ = -$\mathbf{i}$ + 5$\mathbf{j}$ - 3$\mathbf{k}$

    e) $\mathbf{U} = \langle -6, 0, 1\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 0, 9, 8\rangle$

23. Para los siguientes pares de vectores del espacio, calcule el producto vectorial y verifique que el vector resultante de este producto es ortogonal a los vectores operados.

    a) $\mathbf{U} = \langle 3, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 4, 7, -1\rangle$

    b) $\mathbf{u}$ = 5$\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ + 3$\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}$ = -3$\mathbf{i}$ + 6$\mathbf{j}$

    c) $\mathbf{U} = \langle 1, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 0, 4, -3\rangle$

    d) $\mathbf{u}$ = 5$\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ + 6$\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}$ = -$\mathbf{i}$ + 5$\mathbf{j}$ - 3$\mathbf{k}$

    e) $\mathbf{U} = \langle -6, 0, 1\rangle$ y $\mathbf{V} = \langle 0, 9, 8\rangle$

24. Para las parejas de vectores del ejercicio anterior calcular el área del paralelogramo determinado.

25. Calcular el triple producto escalar para las siguientes ternas de vectores en el orden dado.

    a) $\mathbf{U} = \langle 2, -1, 0\rangle$, $\mathbf{V} = \langle 1, 4, 7\rangle$ y $\mathbf{W} = \langle 1, -3, 2\rangle$

    b) $\mathbf{u} = \langle 3, 4, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -5, 0, 1\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -6, 8, -3\rangle$

    c) $\mathbf{U} = \langle 6, -1, 2\rangle$, $\mathbf{V} = \langle -1, 4, -7\rangle$ y $\mathbf{W} = \langle 1, -3, -2\rangle$

    d) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -4, 7\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -1, 3, -2\rangle$

    e) $\mathbf{u}$ = 5$\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ + 6$\mathbf{k}$, $\mathbf{v}$ = -$\mathbf{i}$ + 5$\mathbf{j}$ - 3$\mathbf{k}$ y $\mathbf{w}$ = -$\mathbf{i}$ + 5$\mathbf{j}$ - 3$\mathbf{k}$

    f) $\mathbf{u}$ = $\mathbf{i}$ - 7$\mathbf{j}$ + $\mathbf{k}$, $\mathbf{v}$ = 5$\mathbf{j}$ - 3$\mathbf{k}$ y $\mathbf{w}$ = -$\mathbf{i}$ - $\mathbf{k}$

Ejercicios Capítulo 2

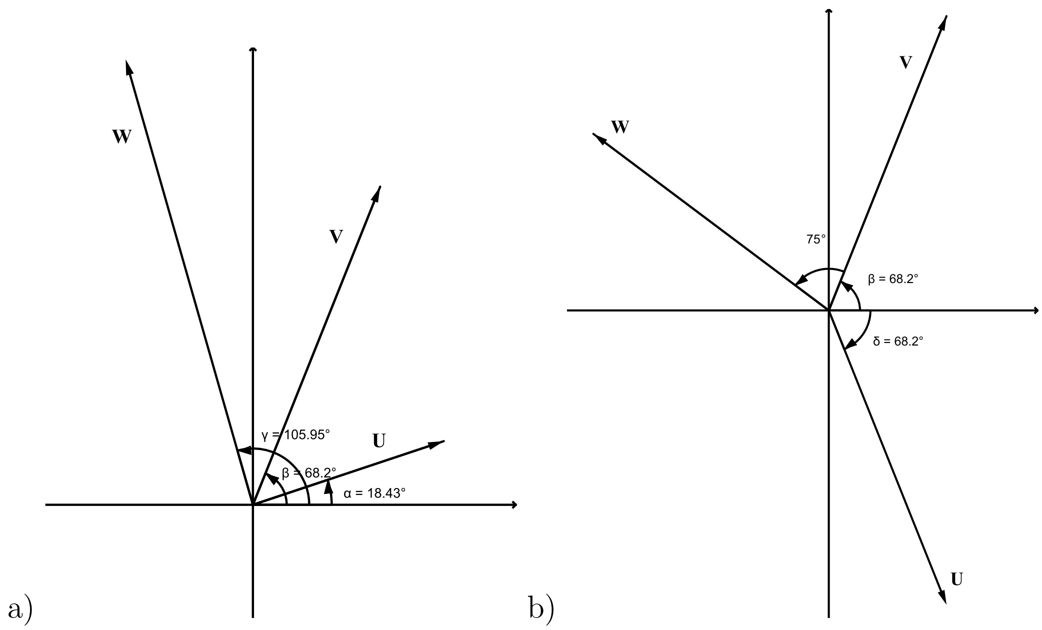


Figura 2.19: **a)** $\|U\| = 4, \|V\| = 6$ y $\|W\| = 8$, **b)** $\|U\| = 5, \|V\| = 5{,}5$ y $\|W\| = 5$

1. Considere los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{a} = \langle 4, -2, 3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -2, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 1, -1, 2\rangle$, hallar la operación indicada.

   a) $\|\mathbf{a} + \mathbf{c}\|$
   b) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}\|$
   c) $\|\mathbf{a} + \mathbf{c}\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|$
   d) $\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{c}\|$
   e) $\|\frac{\|\mathbf{a}\|}{\mathbf{c}}\|$
   f) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{\|\mathbf{a}+\mathbf{c}\|}$

2. Hallar escalares α, β y γ tales que:

   a) $\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
   b) $\langle 30, 3\alpha, -\beta\rangle = \langle 5\gamma, 15, -2\rangle$
   c) $6\mathbf{i} + 5\beta\mathbf{j} + 4\gamma\mathbf{k} = 3\alpha\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$
   d) $\langle 2(\alpha + \beta), 3\alpha, -1\rangle = \langle 5, 15, -2\rangle$

3. Exprese **U**, **V** y **W** de la Figura 2.19 **a)** y **b)** como vectores coordenados.

4. Hallar la suma de los vectores de la Figura 2.19 **a)**.

5. Hallar **U** + **V** - **W** con los vectores de la Figura 2.19 **b)**.

6. Con los vectores de la Figura 2.19 **a)** halle **U** como combinación lineal de **V** y **W**.

7. El punto inicial del vector $u = \langle -2, 4, -1 \rangle$ es $M = (1, 1, -1)$. Hallar el punto final.

8. El punto final del vector $v = \langle -3, 1, 2 \rangle$ es $M = (-1, 0, -1)$. Hallar el punto inicial.

9. Por métodos vectoriales mostrar que los puntos del plano $A(4, -2)$, $B(10, 8)$, $C(-6, 5)$ y $D(0, 14)$ son los vértices de un paralelogramo.

10. Considere los puntos $A(3, -2, 7)$ y $B(2, -4, 4)$ del espacio, hallar las coordenadas del punto C, tal que la magnitud de AC sea el doble de AC.

11. Considere los puntos $A(3, -2, 7)$ y $B(2, -4, 4)$ del espacio, hallar las coordenadas del punto P sobre el segmento AB que divide el segmento en la razón 2 a 3.

12. Dados los Puntos $A(1, -1, 1)$, $B(-2, 3, 5)$ y $C(1, 0, -2)$ verifique vectorialmente que los puntos determinan un triángulo y utilice la ecuación 2.4.3 para encontrar el baricentro.

13. Demuestre que cuando $\alpha = \beta$, ambas diferentes de cero, la ecuación 2.4.3 sirve para calcular el punto medio del segmento.

14. Sea P el punto sobre el segmento de recta AB que está al doble de distancia de lo que está de A. Si $u = \overrightarrow{OA}$, $v = \overrightarrow{OB}$, y $w = \overrightarrow{OP}$, muestre que $w = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v$

15. Para cada uno de los vectores calcular los cosenos y los ángulos directores.

    a) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 3 \rangle$
    b) $\mathbf{v} = \langle 2, -3, -1 \rangle$
    c) $\mathbf{w} = \langle 0, 2, 8 \rangle$
    d) $\mathbf{q} = \langle 1, -2, 3 \rangle$

16. Un vector en el espacio tiene magnitud 5 y ángulos directores $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\beta = \frac{\pi}{4}$. Hallar las componentes del vector.

17. Determine los valores de los escalares a y b tales que los puntos $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (1 + a, 1 + b)$ y $P_3 = (2a, 2b)$ sean colineales.

18. Dados los puntos $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ y $R(6, -2, 5)$ use vectores para determinar si el triángulo es rectángulo.

19. Dados los vectores $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 4\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, -1, -1\rangle$ encuentre vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ tales que $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{q}$ sea ortogonal al vector $\mathbf{v}$.

20. Encuentre el producto cruz $u \times v$ y verifique que es ortogonal a cada uno de los vectores u y v.

    a) $u = \langle 4, 5, 8\rangle$, $v = \langle 2, -6, 8\rangle$
    b) $u = \langle -3, 1, 6\rangle$, $v = \langle -1, 7, 3\rangle$
    c) $u = \langle -2, 4, 6\rangle$, $v = \langle 1, -5, 0\rangle$

21. Si un hombre jala una carreta por la acera con una fuerza de 50N ejercida a un ángulo de $38°$ arriba de la horizontal, encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

22. Un marinero camina al oeste en la cubierta de un barco a 3 millas/h. El barco se mueve al norte a una velocidad de 22 Millas/h. Encuentre la rapidez y la dirección del marinero respecto a la superficie del agua.

23. Un cable de tensión está atado entre dos postes separados 10 m. El cable se halla lo suficientemente tenso y determina una comba insignificante. Cuando se posa un ave de 0.9 Kg de peso a la mitad del cable, el punto medio baja 10cm. Determine la tensión en cada mitad del cable.

CAPÍTULO 3

RECTAS Y PLANOS

CAPÍTULO 3
RECTAS Y PLANOS

A lo largo de la historia muchos pensadores han dado definiciones relacionadas con la recta:

- Es la línea que sus puntos intermedios hacen sombra a sus extremos (Platón, 427-347).
- Es el conjunto de puntos que permanecen invariantes cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos (Leibniz, 1646-1716).
- Es el camino más corto entre dos puntos (Legendre, 1752-1833).
- Es la línea que, trazada de un punto a otro no se vuelve ni a la derecha ni a la izquierda, y es la más corta que puede trazar entre esos dos puntos (Simpson, 1710-1761).
- La recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados (Fourier, 1768-1830).
- Es una línea homogénea, es decir, cuyas partes, tomadas indiferentemente, son semejantes entre sí y no difieren más que en su longitud (Delboeuf, 1831-1896).
- Es una línea indefinida tal que por dos puntos dados no se puede hacer pasar más que una (Duhamel, 1797-1872).

La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la Edad Media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado *El Discurso del Método*, publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra.

Este fundamento daría paso a lo que se conoce hoy en día como geometría analítica, que precisamente es la rama de las matemáticas que fusiona el estudio de la geometría euclidiana con el álgebra, en el análisis de las líneas y figuras por medio de expresiones algebraicas. Se llama analítica a esta geometría porque implica un análisis estricto, lógico y racional para consignar en un plano de referencia los elementos geométricos básicos y luego hallar sus correspondencias en fórmulas y propiedades algebraicas.

La principal referencia es el plano cartesiano, llamado así en memoria de este gran hombre de las matemáticas y la filosofía. Es pues de esta manera como se convierte la línea recta en la introducción y parte de la geometría analítica y por extensión, del cálculo vectorial.

El OBJETIVO de este capítulo es que el estudiante logre:

- Aprender a reconocer una recta
- Graficar rectas en el plano y en el espacio
- Diferenciar posiciones relativas entre rectas, en el plano y en el espacio
- Identificar y calcular el ángulo entre dos rectas
- Identificar las diferentes ecuaciones de la recta en el plano y el espacio
- Calcular la ecuación de la recta pedida en situaciones problema
- Aprender a reconocer un plano en el espacio
- Graficar planos en el espacio
- Diferenciar posiciones relativas entre rectas y planos en el espacio
- Identificar y calcular el ángulo entre dos planos, y entre una recta y un plano
- Identificar las diferentes ecuaciones del plano en el espacio
- Calcular la ecuación del plano pedida en situaciones problema

A continuación desarrollaremos los conceptos básicos de la recta.

3.1 Rectas

Consideremos una recta ℓ en el espacio y un vector v paralelo a la recta ℓ, sea P_0 un punto sobre la recta, como muestra la Figura 3.1. Sea X un punto sobre la recta que se quiere determinar en términos del punto P_0 y el vector v.

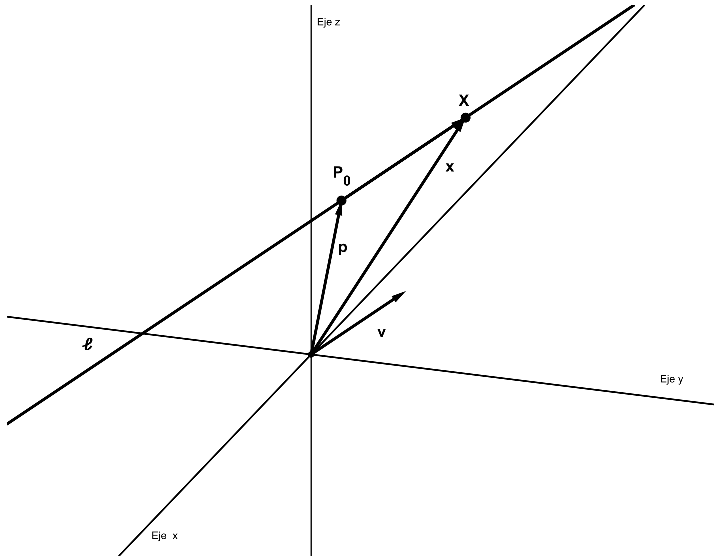


Figura 3.1: Vectores y puntos coplanares

Supongamos que $v = \langle a, b, c \rangle$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que $X = (x, y, z)$. Entonces se tiene para $\alpha \in \mathbb{R}$, en este contexto llamado parámetro[5], que:

$$P_0X = \alpha v,$$

ya que el vector P_0X resulta ser paralelo a la recta y por tanto al vector v. La ecuación anterior es llamada **ecuación vectorial de la recta** y se puede escribir como sigue en términos de las componentes.

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \alpha \langle a, b, c \rangle,$$

por la igualdad de los vectores se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha a \\ y &= y_0 + \alpha b \\ z &= z_0 + \alpha c \end{aligned}$$

Qué son llamadas las **ecuaciones parámetricas** de la recta ℓ. Si en las ecuaciones paramétricas despejamos en cada una el parámetro α, e igualamos los resultados, se obtiene:

$$\alpha = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

que se conocen como las **ecuaciones simétricas** de la recta ℓ.

[5]Constante o variable que da lugar a diferentes casos de un problema.

Ejemplo 3.1.1 *Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de de la recta ℓ que tiene vector director $v = \langle -1, 2, -3\rangle$ y pasa por el punto $P_0 = (3, 4, 2)$.*

Solución

La forma de las ecuaciones paramétricas es:

$$x = x_0 + \alpha a \quad ; \quad y = y_0 + \alpha b \quad ; \quad z = z_0 + \alpha c$$

donde $v = \langle -1, 2, -3\rangle = \langle a, b, c\rangle$ y $P_0 = (3, 4, 2) = (x_0, y_0, z_0)$, con eso:

$$x = 3 - \alpha \quad ; \quad y = 4 + 2\alpha \quad ; \quad z = 2 - 3\alpha$$

Para hallar las ecuaciones simétricas se puede hacer de dos maneras: la primera es tomar directamente la forma de las ecuaciones simétricas dada; y la segunda, es tomar la ecuación paramétrica encontrada y despejar el paramétro α. Como ya conocemos las ecuaciones paramétricas procedamos a despejar α en las ecuaciones paramétricas encontradas el paramétro, e igualemos los resultados, obtenemos:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-3}$$

La gráfica de la situación se muestra en la Figura 3.2.

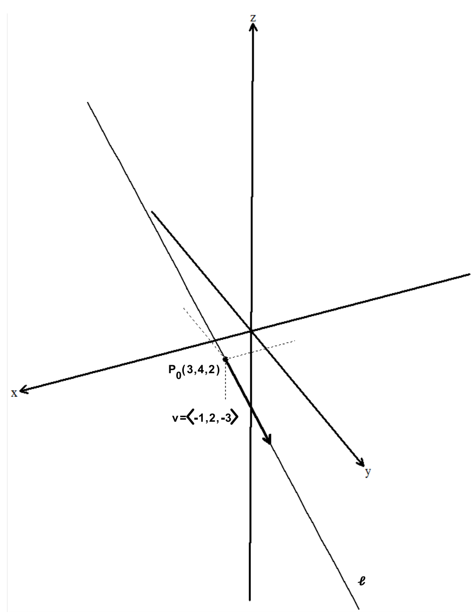


Figura 3.2: Gráfica de la recta que pasa por $P_0 = (3, 4, 2)$ y tiene vector director $v = \langle -1, 2, -3\rangle$

Ejemplo 3.1.2 *Dada la ecuación simétrica de la recta ℓ*

$$\frac{2x-4}{-4} = \frac{6-3y}{3} = \frac{4-z}{-3}$$

Hallar un vector director y un punto de la recta.

Solución

Primero debemos arreglar la ecuación a la forma de la ecuación simétrica, esto es

$$\frac{2(x-2)}{-4} = \frac{-3(y-2)}{3} = \frac{-(z-4)}{-3},$$

simplificando, tenemos:

$$\frac{(x-2)}{-2} = \frac{(y-2)}{-1} = \frac{(z-4)}{3},$$

ya escrita en la forma simétrica, extraemos del numerador el punto $P = (2, 2, 4)$ y del denominador extraemos el vector director $v = \langle -2, -1, 3\rangle$ (Ver Figura 3.3).

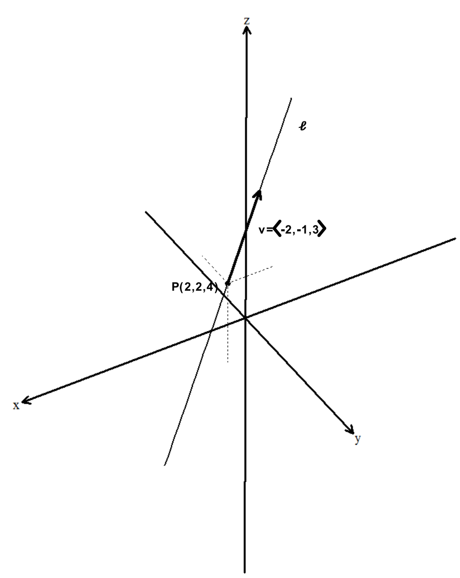


Figura 3.3: Gráfica de la recta $\frac{2x-4}{-4} = \frac{6-3y}{3} = \frac{4-z}{-3}$

3.1.1 Ángulo entre rectas

Dadas dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 del espacio, v_1 y v_2 los respectivos vectores directores, el ángulo entre las rectas se define como el ángulo entre los vectores directores, es decir,

$$ang(\ell_1, \ell_2) = ang(v_1, v_2)$$

Se debe recordar que el ángulo entre los vectores es el menor posible, es decir, el que está entre cero y 180°.

Ejemplo 3.1.3 *Dadas las rectas ℓ_1 y ℓ_2 representadas por las ecuaciones simétrica y paramétrica respectivamente.*

$$\ell_1 : \frac{3x-9}{6} = \frac{4-y}{5} = \frac{4-z}{-1}, \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Hallar el ángulo entre ellas.

Solución

Como el ángulo depende de los vectores directores y los vectores directores son $v_1 = \langle 2, -5, 1\rangle$ y $v_2 = \langle -1, 2, -3\rangle$, el estudiante deberá verificar que en efecto estos son los vectores directores de las rectas dadas, entonces:

$$cos(\theta) = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{-2-10-3}{\sqrt{4+25+1}\sqrt{1+4+9}} = \frac{-15}{\sqrt{30}\sqrt{14}},$$

de donde:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{-15}{\sqrt{30}\sqrt{14}}\right) = 137{,}0480°,$$

así, el ángulo entre las rectas es $\alpha = 180° - \theta = 180° - 137{,}0480° = 42{,}952°$.

3.1.2 Posición relativa entre rectas

Dadas las recta l_1 y l_2 con vectores directores v_1 y v_2 respectivamente en el espacio, decimos que:

1. **Las rectas son paralelas** $(l_1 \parallel l_2)$ sí y sólo sí $v_1 \parallel v_2$. En general se debe verificar que $v_1 \times v_2 = \mathbf{O}$. Ver Figura 3.5 a).

2. **Las rectas son perpendiculares** $(l_1 \perp l_2)$ sí y sólo sí $v_1 \perp v_2$. En general se debe verificar $v_1 \cdot v_2 = 0$. Ver Figura 3.5 b).

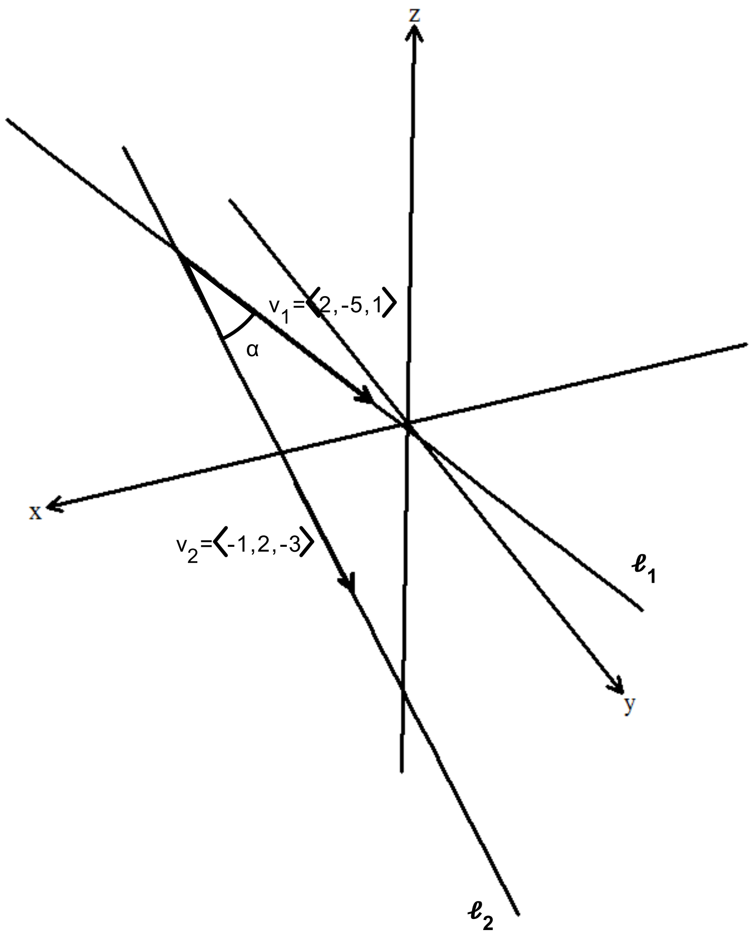


Figura 3.4: Ángulo entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2

3. **Las rectas se cortan**, si l_1 y l_2 no son paralelas y tienen un punto en común. Ver Figura 3.5 c).

4. **Las rectas l_1 y l_2 son coincidentes**, si son paralelas y tienen un punto en común. Dos rectas coincidentes graficamente se representan por la misma recta, difieren en su representación analítica o ecuación.

5. **La rectas l_1 y l_2 son oblicuas**, si no son paralelas y no tienen un punto en común. Ver Figura 3.5 d). Las rectas oblicuas son rectas en el espacio que no son parelalas y no se cortan.

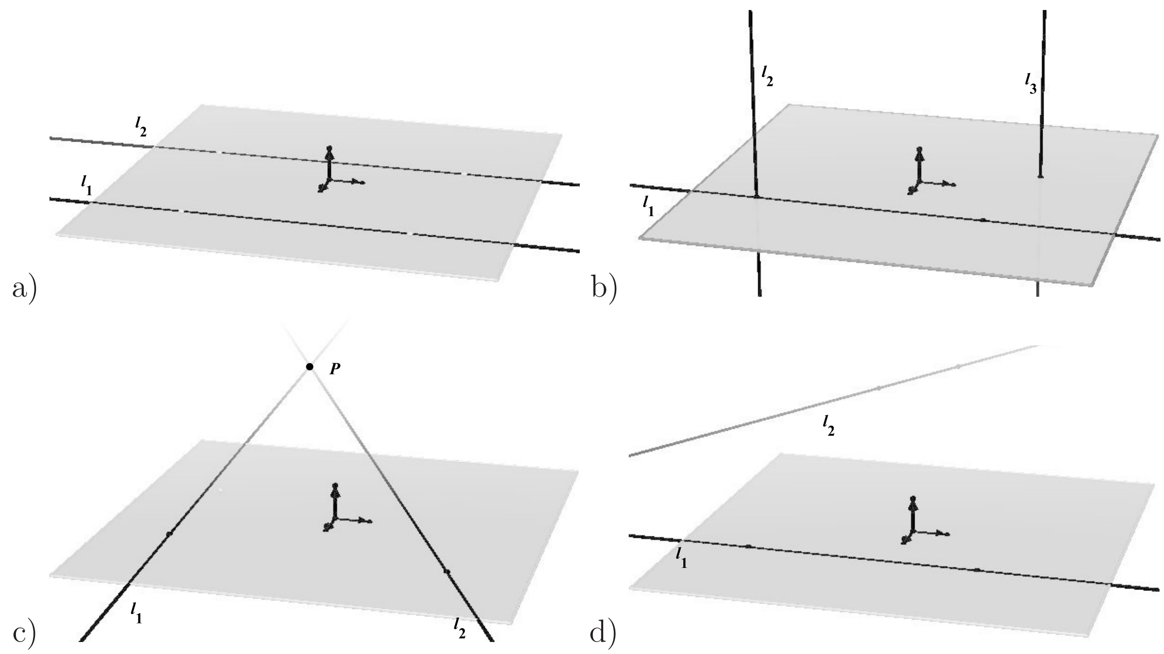


Figura 3.5: a) Rectas paralelas en el espacio b) Rectas perpendiculares en el espacio c) Rectas secantes en el espacio d) Rectas oblicuas

Ejemplo 3.1.4 *Demuestre que la recta que pasa por los puntos* $(2,-1,-5)$ *y* $(8,8,7)$ *es paralela a la recta que pasa por los puntos* $(4,2,-6)$ *y* $(8,8,2)$.

Solución

La condición de paralelismo depende de los vectores directores, entonces hallemos los vectores directores de cada una de las rectas, esto es:

$$v_1 = \langle 8,8,7\rangle - \langle 2,-1,-5\rangle = \langle 6,9,12\rangle$$

y

$$v_2 = \langle 8,8,2\rangle - \langle 4,2,-6\rangle = \langle 4,6,8\rangle$$

Si estos vectores son paralelos entonces las rectas son paralelas, y como:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 9 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \langle 9*8-6*12, -(6*8-4*12), 6*6-4*9\rangle,$$

entonces:

$$v_1 \times v_2 = \langle 0,0,0\rangle,$$

luego, los vectores son paralelos y por tanto las rectas son paralelas.

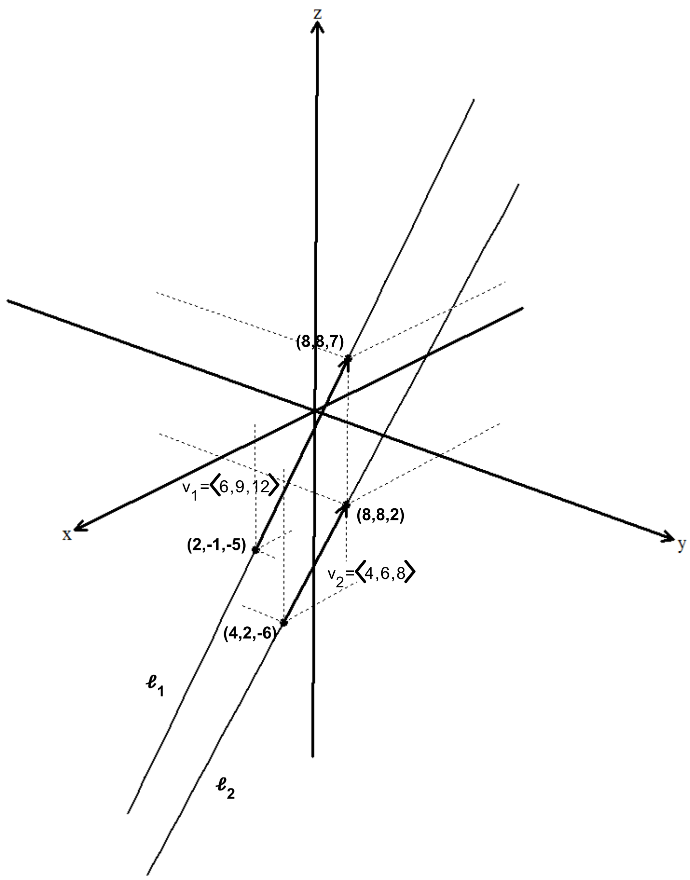


Figura 3.6: Rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2

Ejemplo 3.1.5 *Demuestre que la recta que pasa por los puntos* $P(0,1,1)$ *y* $Q(1,-1,6)$ *es perpendicular a la recta que pasa por los puntos* $R(-4,2,1)$ *y* $M(-1,6,2)$.

Solución

La condición de perpendicularidad depende de los vectores directores, entonces hallemos los vectores directores de cada una de las rectas, esto es:

$$v_1 = PQ = OP - OQ = \langle 0,1,1\rangle - \langle 1,-1,6\rangle = \langle -1,2,-5\rangle$$

y

$$v_2 = RM = OM - OR = \langle -4,2,1\rangle - \langle -1,6,2\rangle = \langle -3,-4,-1\rangle.$$

Si estos vectores son perpendiculares entonces las rectas son perpendiculares, y como:

$$v_1 \cdot v_2 = \langle -1,2,-5\rangle \cdot \langle -3,-4,-1\rangle = 3 - 8 + 5 = 0,$$

luego los vectores son perpendiculares y por tanto las rectas son perpendiculares.

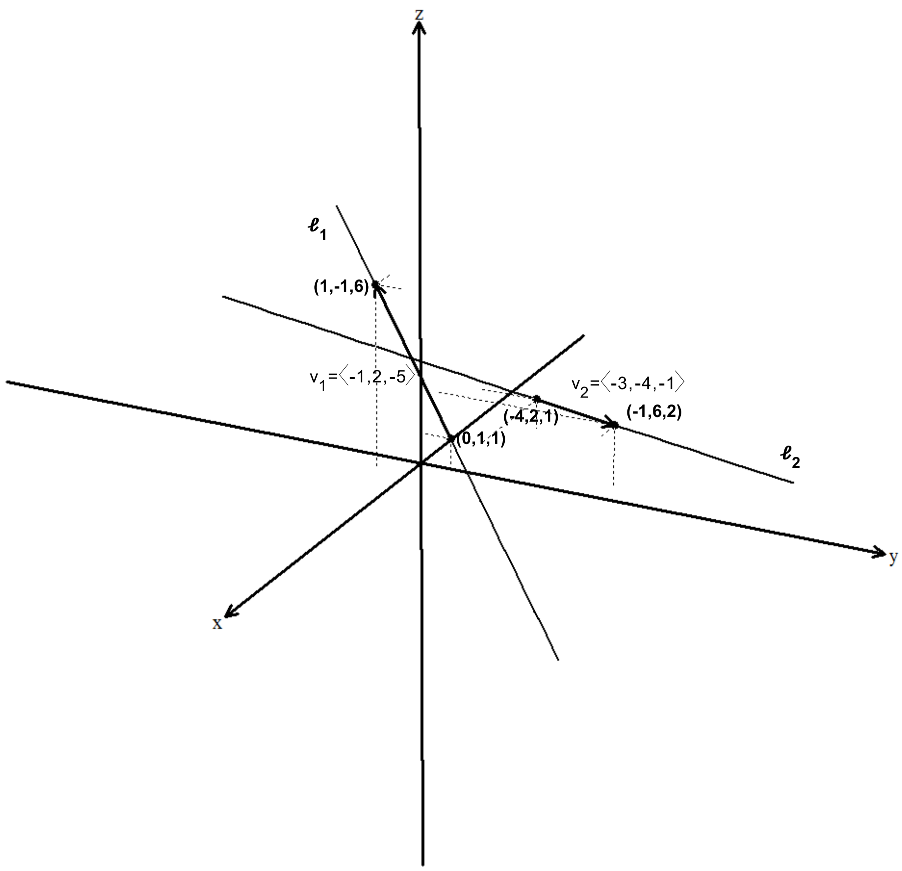


Figura 3.7: Rectas perpendiculares ℓ_1 y ℓ_2

Ejemplo 3.1.6 *Para los siguientes pares de rectas determine si las rectas l_1 y l_2 son paralelas, oblicuas o se cortan . Si se cortan encuentre el punto de intersección.*

1.
$$l_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-3} \quad y \quad l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

2.
$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4} \quad y \quad l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$$

3.
$$l_1 : \begin{cases} x = -6t \\ y = 1 + 9t \\ z = -3t \end{cases} \quad ; \quad l_2 : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 4 - 3s \\ z = s \end{cases}$$

Solución

1. Primero veamos si las rectas son paralelas, notemos que los vectores directores de las rectas son:

$$v_1 = \langle 2, 4, 3 \rangle \quad \text{y} \quad v_2 = \langle 1, 3, 2 \rangle$$

Realicemos el producto vectorial entre los vectores v_1 y v_2, esto es:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \langle (8-6), -(4-3), (6-4) \rangle = \langle 2, -1, 2 \rangle,$$

luego los vectores v_1 y v_2 no son paralelos y por tanto las rectas no son paralelas. Veamos si las rectas se cortan o se cruzan. Supongamos que las rectas se cortan, para esto igualemos las rectas en su representación paramétrica, esto es:

$$\begin{aligned} 4 + 2t &= 2 + \lambda \\ -5 + 4t &= -1 + 3\lambda \\ 1 - 3t &= 2\lambda \end{aligned}$$

Notemos que en el sistema de ecuaciones aparecen tres ecuaciones y dos paramétros. Para resolver utilizamos dos de las tres ecuaciones, utilizaremos la otra ecuación para verificar la suposición de que las rectas se cortan. En este caso usaremos las dos primeras ecuaciones para resolver y la tercera para verificar. Veamos:

$$\begin{aligned} 2t - \lambda &= -2 \\ 4t - 3\lambda &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -6t + 3\lambda &= 6 \\ 4t - 3\lambda &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -2t = 10 \quad \Rightarrow \quad t = -5,$$

reemplazando t en la primera ecuación obtenemos $\lambda = -8$. Utilizamos ahora estos valores de t y de λ en la tercera ecuación para verificar la suposición. Esto es:

$$1 - 3t = 2, (\lambda) \quad \Rightarrow \quad 1 - 3(-5) = 2(-8), \quad \Rightarrow \quad 16 = -16$$

Como no se dá la igualdad, concluimos que las rectas son oblicuas.

2. El procedimiento en este ejemplo es el mismo que en el anterior. Veamos si las rectas son paralelas, en este caso tenemos

$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \langle (3-8), -(6-4), (4-1) \rangle = \langle -5, -2, 3 \rangle,$$

luego los vectores no son paralelos. Veamos si las rectas se cortan o son oblicuas, para esto igualemos las respectivas ecuaciones paramétricas suponiendo que las rectas se cortan.

$$\begin{gathered} 1 + 2t = \lambda \\ t = -2 + 2\lambda \\ 1 + 4t = -2 + 3\lambda \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} 2t - \lambda &= -1 \\ t - 2\lambda &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -4t + 2\lambda &= 2 \\ t - 2\lambda &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -3t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Con eso, en la primera ecuación tenemos que $\lambda = 1$. Ahora usamos la segunda ecuación para verificar la suposición de que las rectas se cortan. Esto es

$$\begin{gathered} 1 + 4t = -2 + 3\lambda \\ 1 + 4(0) = -2 + 3(1) \\ 1 = 1 \end{gathered}$$

Como se da la igualdad concluímos que las rectas se cortan. El punto de corte lo podemos hallar sustituyendo el valor de alguno de los parámetros en la ecuación paramétrica respectiva. Por ejemplo reemplazando el paramétro $t = 0$ tenemos que el punto de corte es:

$$\begin{array}{ccc} x = 1 + 2t, & y = t, & z = 1 + 4t \\ x = 1, & y = 0, & z = 1 \end{array}$$

Luego el punto de corte es $P = (1, 0, 1)$. El estudiante deberá verificar que con $\lambda = 1$ se obtiene el mismo punto para la otra recta.

3. De nuevo veamos primero si las rectas son paralelas, esto es:

$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \langle (9 - 9), -(-6 + 6), (18 - 18) \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

de donde se concluye que las rectas son paralelas.

Ejercicios Sección 3.1.1

1. En cada caso encuentre las ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el par de puntos.

   a) A = (1, -1, 1), B = (0, -2,3)
   b) A = (2, 1, 3), B = (3, 1, -2)
   c) A = (5, 2, 3), B = (7, 5, 0)
   d) A = (10, 7, -5), B = (3, 7, -6).
   e) A = (-4, -1, 5), B = (-8, -6, 4)
   f) A = (-10, -5, 7), B = (4, 8, 2)

2. En cada caso encuentre las ecuaciones simétricas para la línea que pasa por el par de puntos.

   a) $A = (-1, -1, -1)$, $B = (0, -2, 3)$
   b) $A = (2, 0, -3)$, $B = (1, 1, -2)$
   c) A = (5,2,-5), B = (6,4,0)
   d) A = (10, -3, -5), B = (-3, 4, -6)
   e) A = (-4, -1, -5), B = (-8, 3, 2)
   f) A = (-10, -2, -7), B = (-4, 5, -2)

3. Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a los vectores $u = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $v = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ y pasa por el punto $P = (1, -2, 2)$.

4. El vector director de una recta es $U = \langle 1, k + 1, k \rangle$. Halle la ecuación de la recta si sabemos que la recta es paralela al vector $V = \langle 1, 2, -3 \rangle$ y pasa por el punto $(3, -4, 5)$.

5. En cada caso encuentre las ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el punto y esparalela al vector.

   a) P = (-1, -1, -1), $u = \langle 1, -1, 3 \rangle$
   b) Q = (2, 0, 3), $v = \langle 1, 1, -2 \rangle$
   c) M = (-1, -1, -1), $q = \langle 6, 4, 0 \rangle$
   d) N = (-1, -1, -1), $p = \langle -3, 4, 3 \rangle$

   En los ejercicios 6 a 14 encuentre las ecuaciones simétricas y paramétricas de la que cumpla la condición dada.

6. Pasa por el punto P = (-1,1,0) y es paralela a la recta $\ell : \langle 2 + 2t, -3t, 1 - 4t \rangle$.

7. Pasa por el punto $Q = (2, 0, -3)$ y es paralela a la recta $\ell : \frac{3x-6}{6} = \frac{2y-4}{2} = z$.

8. Pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es paralela al eje y.

9. Pasa por el punto $Q = (1, 0, 1)$ y es paralela al eje x.

10. Pasa por el punto $M = (0, 1, 1)$ y es paralela al eje z.

11. Pasa por el punto $N = (2, 1, 0)$ y es perpendicular al plano xy.

12. Pasa por el punto $T = (3, 1, -4)$ y es perpendicular al plano yz.

13. Pasa por el punto $S = (-1, 1, 0)$ y es perpendicular al plano xz.

14. Para las siguientes rectas determine cuales son paralelas, cuales son ortogonales y halle el ángulo entre cada dos de ellas.

 a) $\ell_1 : \mathbf{r} = \langle -1 + \alpha, 3\alpha, -2\alpha \rangle$

 b) $\ell_2 : t = \dfrac{x-6}{6} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{2-2z}{8}$

 c) $\ell_3 : x = 4 - 4\beta,\ y = \beta,\ z = 2 - 2\beta$

 d) $\ell_4 : x - 1 = 2 - y = \frac{z}{3}$

 e) $\ell_3 : \dfrac{3-x}{-3} = y - 2 = \dfrac{z-8}{2}$

 En los ejercicios 15 a 19 determine si las rectas se cortan o si son oblicuas. En caso de que se corten halle el punto de corte.

15. $\ell_1 : \mathbf{r} = \langle 4 + \alpha, 5 + \alpha, -1 + 2\alpha \rangle$, $\ell_2 : t = \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-11}{4} = z + 3$

16. $\ell_1 : \gamma = 3 - x = y - 2 = \dfrac{z-8}{2}$, $\ell_2 : \beta = \dfrac{2x-2}{2} = \dfrac{4-2y}{2} = \dfrac{z}{3}$

17. $\ell_1 : \alpha = 2 - x = y = \dfrac{z+1}{-3}$, $\ell_2 : \theta = \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{1-y}{-1} = 3 - z$

18. $\ell_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, $\ell_2 : \dfrac{2-x}{-1} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$

3.2 Planos

Desde el punto de vista de la geometría plana, un plano se determina cuando:

1. Se tienen tres puntos no colinealales, ver Figura 3.8 a).

2. Se tienen dos rectas paralelas no coincidentes. Ver Figura 3.8 b).

3. Se tienen dos rectas secantes. Ver Figura 3.8 c).

4. Se tienen una recta y un punto no contenido en la recta, ver Fígura 3.8 d).

Dentro de la geometría analítica, determinar un plano significa conocer de él una ecuación, que condicione los puntos en el espacio que los representan. Para conseguir esta ecuación, se reduce cualquier situación anterior a dos vectores no paralelos y un punto. Sean v_1 y v_2 dos vectores no paralelos del espacio y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto del espacio sobre un plano. Si $X = (x, y, z)$ es un punto del plano que se quiere determinar, ver Figura 3.9 a).

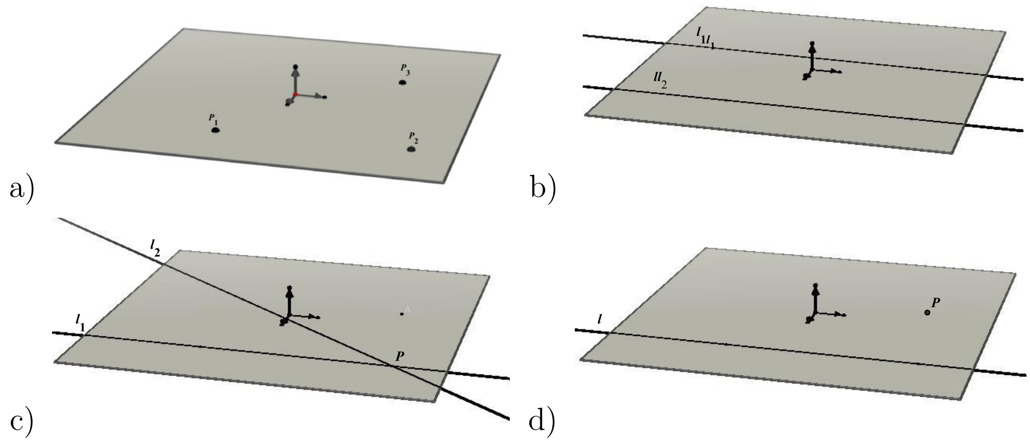


Figura 3.8: a) tres puntos b) paralelas c) secantes d) punto recta

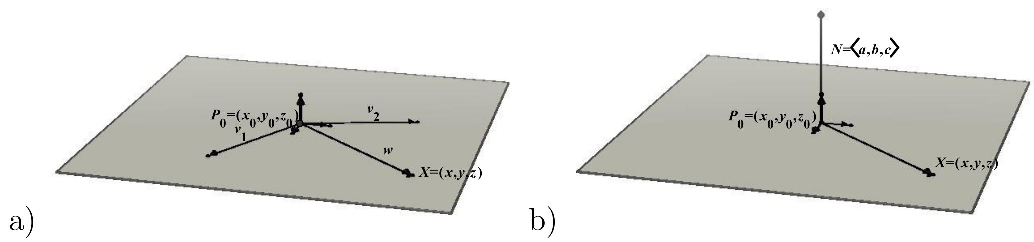


Figura 3.9: a) Plano determinado por dos vectores v_1 y v_2 b) Plano determinado por un vector normal N y un punto P_0 sobre el plano

Como X es un punto del plano, entonces P_0X es un vector paralelo[6] al plano que se puede escribir como combinación lineal de los vectores v_1 y v_2. Esto es, para α y β en $\mathbb{R}$

$$P_0X = \alpha v_1 + \beta v_2,$$

que se conoce como **ecuación vectorial** del plano.

De la ecuación vectorial tenemos que:

$$w = OX - OP_0 = \alpha\langle a_1, b_1, c_1\rangle + \beta\langle a_2, b_2, c_2\rangle,$$

por tanto,

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = \langle \alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2\rangle,$$

[6] Aquí también podríamos haber escrito “sobre” ya que P_0X es un vector libre.

usando la igualdad de vectores tenemos que:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y - y_0 = \alpha b_1 + \beta b_2 \\ z - z_0 = \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases}$$

de donde,

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y = y_0 + \alpha b_1 + \beta b_2 \\ z = z_0 + \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases}$$

Las cuales se conocen como **las ecuaciones paramétricas** del plano .
Supongamos ahora que N es un vector normal al plano, como P_0X es un vector del plano y N es un vector normal al plano, es normal a todos los vectores del plano en particular a P_0X, ver Fígura 3.9b), se cumple entonces que:

$$P_0X \cdot N = 0,$$

luego

$$(OX - OP_0) \cdot N = 0,$$

desarrollando la ecuación se obtiene:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \cdot \langle a, b, c \rangle = 0$$

o sea,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que es llamada la **ecuación analítica** del plano.

Ejemplo 3.2.1 *Hallar la ecuación del plano en cada uno de los casos.*

1. *Dados los tres puntos* $P_0 = (1, -2, 3)$, $P_1 = (-1, 1, 3)$ *y* $P_2 = (0, -1, 1)$.
2. *Dada la recta:*

$$\ell : \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{-4} = \frac{z-3}{2}$$

   y el punto $P_0 = (-1, 2, 1)$.

3. *Dadas las siguientes rectas paralelas*

$$\ell_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{-2} = \frac{z+1}{3} \quad y \quad \ell_2 : \frac{2x-4}{2} = \frac{2-2y}{-2} = \frac{2z+6}{3}$$

4. Dadas las siguientes rectas que se cortan

$$\ell_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4} \quad y \quad \ell_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$$

Solución

Para hallar la ecuación analítica, recordemos que en cada caso que debemos encontrar un vector normal al plano y un punto.
1) Como tenemos tres puntos, encontremos dos vectores y con ellos un vector normal al plano. Sean los vectores:

$$u = P_1 - P_0 = (-1,1,3) - (1,-2,3) = \langle -2,3,0\rangle$$

$$v = P_2 - P_0 = (0,-1,1) - (1,-2,3) = \langle -1,1,-2\rangle$$

Un vector perpendicular al plano está dado por:

$$N = u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \langle -6,-4,1\rangle$$

Utilicemos la ecuación analítica con $\langle a,b,c\rangle = \langle -6,-4,1\rangle$ y $(x_0,y_0,z_0) = (1,-2,3)$, esto es:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

luego,

$$-6(x-1) - 4(y+2) + (z-3) = 0$$

de donde

$$-6x - 4y + z - 5 = 0$$

Que es la ecuación del plano pédido (Ver Figura 3.10).
2) Primero verifiquemos que el punto no está en la recta, esto es:

$$\frac{-1-1}{3} = \frac{2-2}{-4} = \frac{2-3}{2}$$

Como no se dan todas las igualdades, el punto no pertence a la recta. Ahora, necesitamos encontrar un vector normal al plano, y vamos a encontrarlo de la siguiente manera. Primero encontremos tres puntos sobre el plano; segundo, con estos tres puntos encontramos dos vectores del plano; y tercero, con estos vectores encontramos un vector normal.

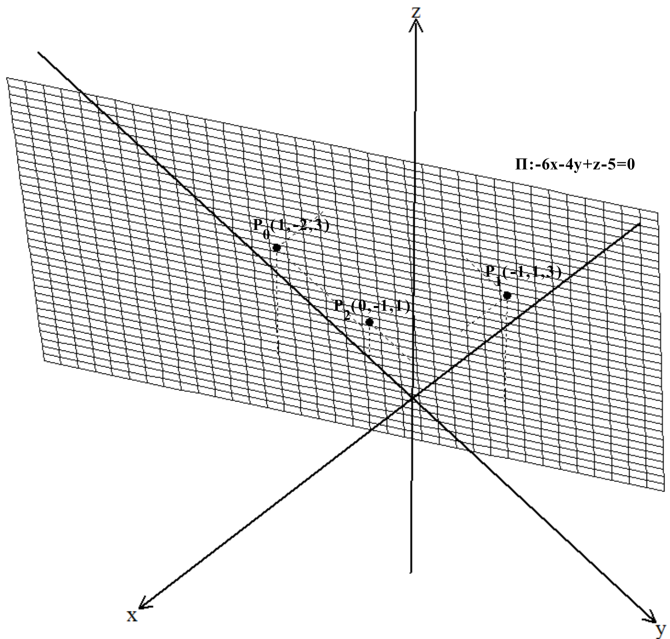


Figura 3.10: Plano que pasa por los puntos $P_0(1,-2,3)$, $P_1(-1,1,3)$ y $P_2(0,-1,1)$

Primero, hallemos tres puntos que están en el plano, estos son el punto P_0 y dos puntos que están sobre la recta, uno de ellos lo llamaremos $P_1 = (1,2,3)$ que sale directamente de la ecuación recta. También de la ecuación de la recta encontraremos el tercer punto que puede ser cualquiera que cumpla la ecuación del plano. Por ejemplo, el punto $P_2 = (4,6,5)$, el estudiante deberá verificar que este punto está en la recta reemplazando en la ecuación de la misma. Con estos puntos creamos los vectores u y v.
Segundo, sean los vectores $u = P_2 - P_0 = (4,6,5) - (-1,2,1) = \langle 5,4,4\rangle$ y $v = (1,2,3) - (-1,2,1) = \langle 2,0,2\rangle$. Con estos vectores encontramos el vector normal al plano utilizando el producto vectorial.
Tercero, sea N el vector normal del plano, entonces:

$$N = u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \langle 8,-2,-8\rangle$$

Con este vector y cualesquiera de los puntos podemos utilizar la forma de la ecuación del plano para encontrar la ecuación. Veamos.

$$8(x+1) - 2(y-2) - 8(z-1) = 0$$

luego, la ecuación del plano es (Ver Figura 3.11).

$$8x - 2y - 8z + 20 = 0$$

En este ejercicio también se pudo haber encontrado dos puntos del plano uno de cada recta y con estos puntos hallar un vector, usar el vector diretor de la recta como el otro vector en el producto vectorial para encontrar el vector normal N. Este caso se deja como tarea para el estudiante.

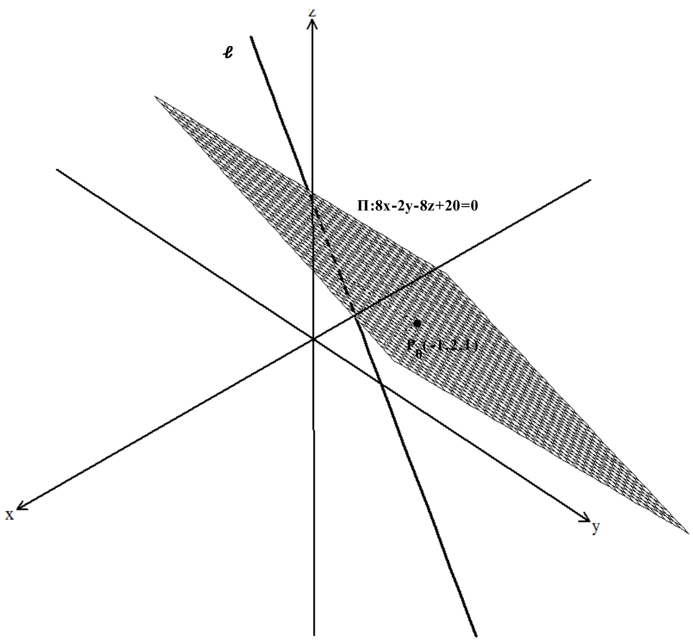


Figura 3.11: Plano que contiene el punto $P_0(-1, 2, 1)$ y la recta $\ell : \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{-4} = \frac{z-3}{2}$

3) Debemos comprobar que las rectas no son coincidentes, esto se deja como ejercicio al estudiante. Sabiendo que las rectas no son coincidentes realizaremos un procedimineto parecido al anterior.

Primero encontraremos un vector con dos puntos, uno de cada recta. **Segundo**, con el vector director de cualquiera de las rectas y el vector encontrado entre los dos puntos encontraremos el vector normal.

Tomemos dos puntos uno de cada recta, y sea:

$$u = P_1 - P_0 = (2, 1, -1) - (2, 1, -3) = \langle 0, 0, 2 \rangle$$

y

$$v = \langle 2, 2, 3 \rangle$$

el vector director de las rectas (son paralelas).

Hallemos el vector normal haciendo uso de los vectores encontrados, esto es

$$N = u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \langle -4, 4, 0 \rangle.$$

Y **tercero**, con el vector normal y un punto hallamos la ecuación del plano, usando el punto P_0, tenemos:

$$-4(x-2)+4(y-1)+0(z+3)=0$$

que simplificando se escribe asi, (Ver Figura 3.12),

$$-4x+4y+4=0$$

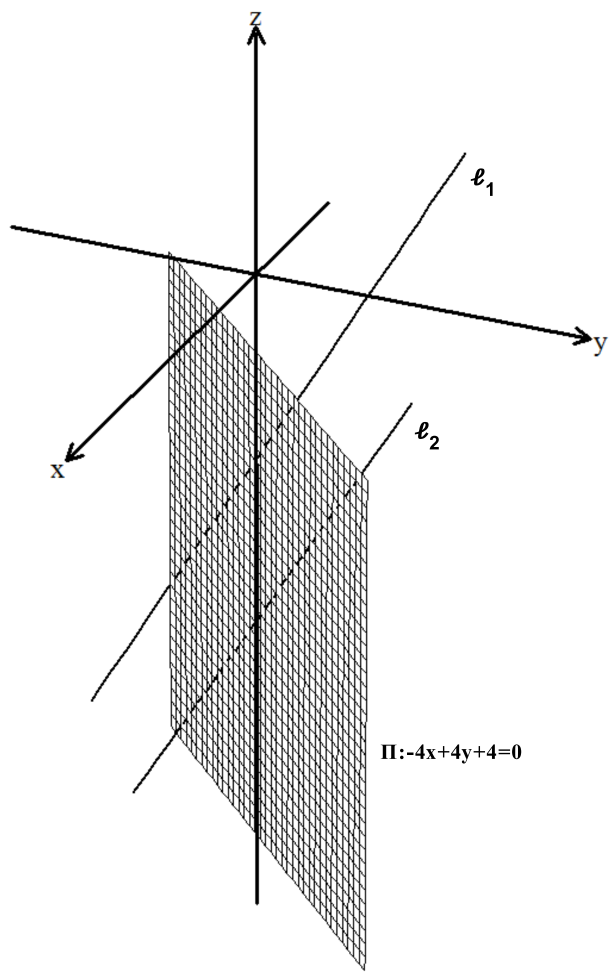


Figura 3.12: Plano que contiene las rectas paralelas $\ell_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{-2} = \frac{z+1}{3}$ y $\ell_2 : \frac{2x-4}{2} = \frac{2-2y}{-2} = \frac{2z+6}{3}$

4) En el ejemplo 3.1.6 numeral 2 de la sección de rectas, se probó que estas rectas se cortan en el punto $P_0 = (1,0,1)$. Como necesitamos un vector normal, lo podemos conseguir usando los vectores directores de las rectas, esto es:

$$u = \langle 2,1,4\rangle \;\; \text{y} \;\; v = \langle 1,2,3\rangle,$$

luego:

$$N = u \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \langle -5, -2, 3 \rangle$$

usando el punto de corte entre las rectas, que claramente está en el plano, y el vector normal tenemos la ecuación del plano:

$$-5(x-1) - 2(y-0) + 3(z-1) = 0,$$

ahora simplificando obtenemos (Ver Figura 3.13)

$$-5x - 2y + 3z + 2 = 0$$

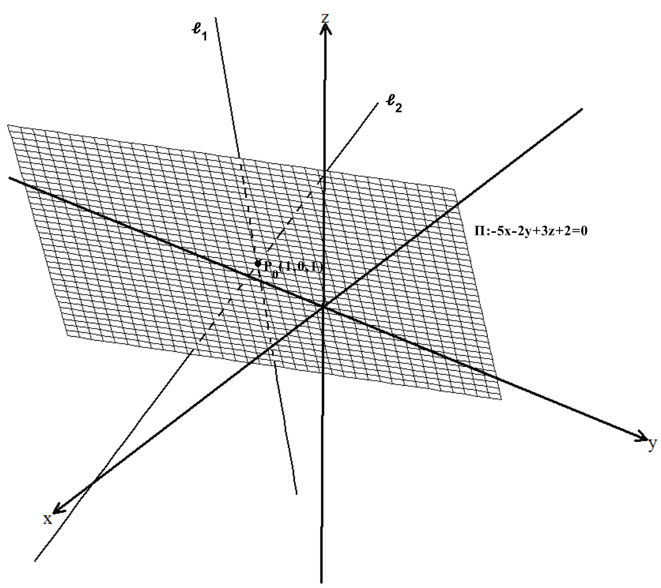


Figura 3.13: Plano que contiene las rectas que se cortan $\ell_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4}$ y $\ell_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$

3.2.1 Posición relativa entre planos

Dados dos planos π_1 y π_2 con vectores normales N_1 y N_2 respectivamente en el espacio, decimos que:

1. **El plano** π_1 **es paralelo al plano** π_2, si los vectores normales N_1 y N_2 son paralelos. Ver Figura 3.14 a).

2. **El plano** π_1 **es perpendicular al plano** π_2, si los vectores normales N_1 y N_2 son perpendiculares, ver Figura 3.14 b).

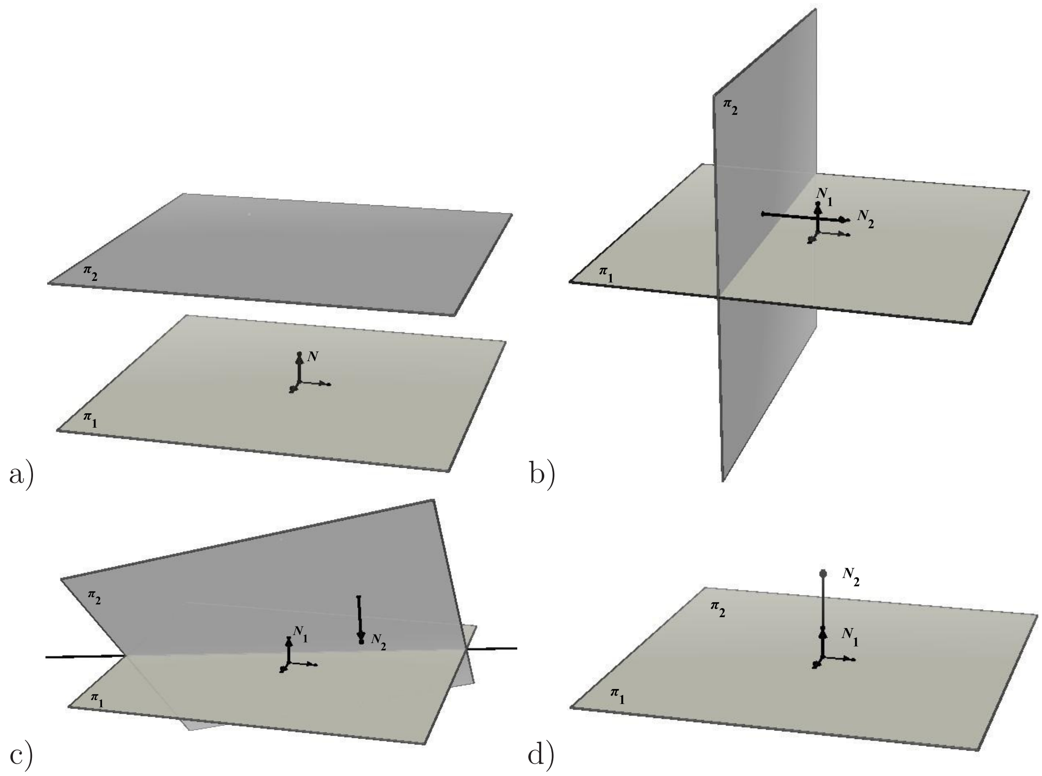


Figura 3.14: a) Planos paralelos, b) Planos perpendiculares, c) Planos secantes, d) Planos coincidentes

3. **Los planos π_1 y π_2 son coincidentes** [7], si los planos son paralelos y tienen un punto P en común. Ver Figura 3.14 c).

4. **Los planos π_1 y π_2 se intersecan**, si no son paralelos, es decir $N_1 \nparallel N_2$. Ver Figura 3.14 d).

Ejemplo 3.2.2 *Considere los planos* $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ *y* $\pi_2 : 3x + 2y - 3z = 3$. *Determine si los planos:*

1. *Son paralelos*

2. *Son perpendiculares*

3. *Son coincidentes*

4. *Se cortan. En caso de que se corten halle la recta de intesección de los planos.*

[7] Dos planos coincidentes representan geométricamente el mismo plano, el vector normal puede ser diferente.

Solución

Primero encontremos los vectores normales de los planos, esto es. Sea N_1 el vector normal al plano π_1 y N_2 el vector normal al plano π_2, según las ecuaciones de los planos $N_1 = \langle 2, -1, 1\rangle$ y $N_2 = \langle 3, 2, -3\rangle$.
a) Recordemos que dos planos son parlelos si sus vectores normales son paralelos. Veamos si los vectores normales son paralelos. Utilicemos el producto vectorial para esto.

$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

Como el producto vectorial no es cero,[8] entonces podemos concluir que los vectores normales de los planos no son paralelos. Por tanto los planos tampoco son paralelos.

b) Para ver si los planos son perpendiculares verificamos si los vectores normales son perependiculares, utilicemos el producto escalar para esto, veamos

$$N_1 \cdot N_2 = \langle 2, -1, 1\rangle \cdot \langle 3, 2, -3\rangle = 6 - 2 - 3 = 1$$

Como el producto escalar entre los vectores normales no es cero[9], concluimos que los vectores normales no son perpendiculares. Por tanto los planos tampoco son perependiculares.

c)Para que los planos sean coincidentes es necesario que sean paralelos, al no ser los planos paralelos tampoco son coincidentes.

d) En el literal a) se probó que los planos no son paralelos, este hecho garantiza que los planos se cortan en una recta. Hay varias formas de hallar la ecuación de la recta de intersección. Podemos hallar el vector v de la recta, el cual tiene la característica de ser perpendicular tanto a N_1 como a N_2, este vector puede ser entonces $v = N_1 \times N_2 = \langle 1, 9, 7\rangle$. Para hallar la ecuación paramétrica de la recta debemos hallar un punto de la recta, y sabemos que este punto satisface:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones y cada solución representa un punto de la recta; para encontrar una solución podemos fijar una variable[10] en un valor determinado, por ejemplo $z = 0$, con esto el sistema se reduce a:

[8]el cero al que nos referimos aquí es al vector cero de $\mathbb{R}^3$.
[9]el cero al que nos referimos aquí es al número cero.
[10]Podemos fijar cualquiera de la varibles x, y o z.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

el cual tiene solución única $(x, y) = (\frac{5}{7}, \frac{3}{7})$. El punto sobre la recta es entonces $P = (\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, 0)$, y con este punto la ecuación paramétrica de la recta de intersección es:

$$\ell : \begin{cases} x = \frac{5}{7} + t \\ y = \frac{3}{7} + 9t \\ z = 7t \end{cases}$$

3.2.2 Posición relativa entre planos y rectas

Dados un plano π con vector normal N y una recta l con vector director v del espacio, decimos que:

1. **La recta l es paralela al plano** π, si el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta, es decir, si $N \perp V$. Ver Figura 3.15 a).

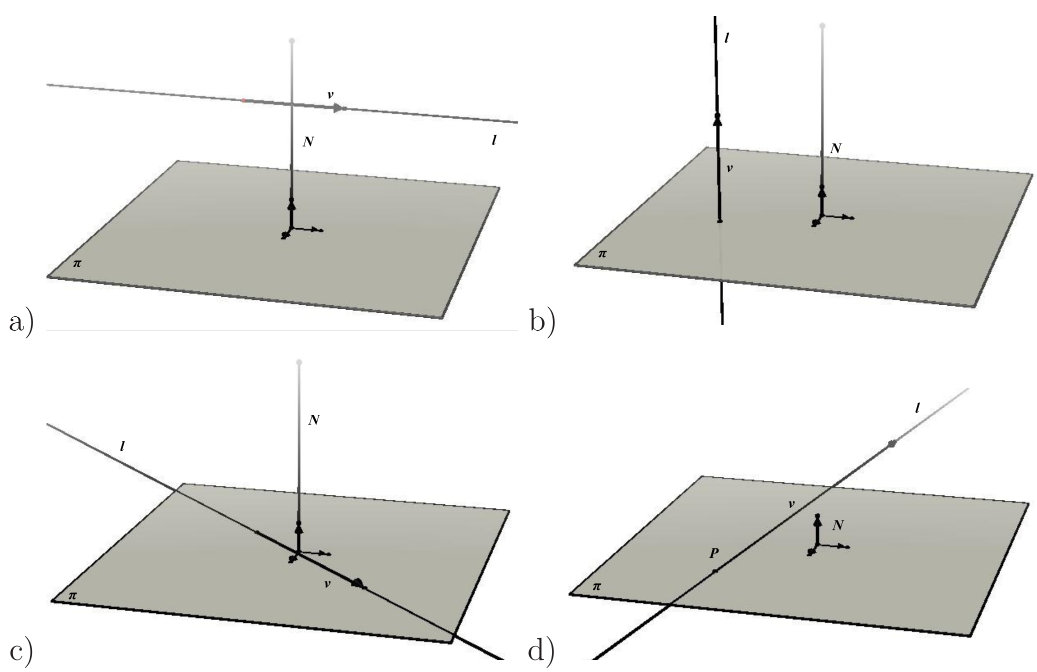


Figura 3.15: a) Recta paralela a un plano. b) Recta perpendicular a un plano. c) Recta contenida en un plano. d) Recta que intersecta a un plano

2. **La recta l es perpendicular al plano** π, si el vector normal del plano es paralelo al vector director de la recta, es decir, si $N \parallel v$. Ver Figura 3.15 b).

3. **La recta l está contenida en el plano** π, si el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta y tienen un punto en común, es decir, si $N \perp v$ y existe P tal que $P \in \pi$ y $P \in l$. Ver Figura 3.15 c).

4. **La recta l se intersecta con el plano** π, si el vector normal del plano no es perpendicular al vector director de la recta, es decir, si $N \cdot v \neq 0$. Ver Figura 3.15 d).

Ejemplo 3.2.3 *Dados el plano $\pi : -x + 2y - 4z = 2$ y la recta*

$$\ell : \frac{x-3}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

Determine si:

a) La recta ℓ es paralela al plano π

b) La recta ℓ es perpendicular al plano π

c) La recta ℓ está contenida en el plano π

d) La recta ℓ intersecta al plano π. En caso de que la recta intersecte al plano hallar el punto de intersección

Solución

Notemos primero que un vector normal del plano es $N = \langle -1, 2, -4 \rangle$ y un vector director de la recta es $v = \langle 2, -3, -1 \rangle$.

a) Recordemos que, para que la recta sea paralela al plano, debe ocurrir que el vector director v de la recta sea perpendicular al vector normal N del plano. Para verificar lo anterior utilizaremos el producto escalar o interno, veamos.

$$v \cdot N = \langle 2, -3, -1 \rangle \cdot \langle -1, 2, -4 \rangle = -2 - 6 + 4 = -4$$

Como el producto escalar es diferente de cero, entonces concluimos que los vectores no son perpendiculares, y por tanto la recta no es paralela al plano.

b) Recordemos que la recta ℓ es perpendicular al plano π si los vectores director de la recta y normal del plano son paralelos; podemos utilizar el producto vectorial para ver esto, veamos:

$$v \times N = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Como el producto vectorial no es cero, entonces la recta no es perpendicular al plano.

c) Para que la recta ℓ esté contenida en el plano debe ocurrir que la recta sea paralela al plano, y ya vimos en literal a) que la recta no es paralela al plano π, por tanto la recta no está contenida en el plano.

d) Como la recta no está contenida en el plano, entonces lo intersecta en un punto. Para hallar el punto donde la recta corta el plano necesitamos escribir la recta en forma de ecuaciones paramétricas, esto es:

$$\ell : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 - t \end{cases},$$

ahora reemplazamos estas ecuaciones en la ecuación del plano $-x + 2y - 4z = 2$ y despejamos el parámetro t, esto es:

$$-(3 + 2t) + 2(2 - 3t) - 4(4 - t) = 2,$$

de donde despejando t y obtenemos $t = -\frac{17}{4}$. El punto de intersección de la recta con el plano se consigue reemplazando este valor en la ecuaciones parámetricas de la recta este punto es $P = (\frac{23}{2}, -\frac{43}{4}, -\frac{1}{4})$, (Ver Figura 3.16).

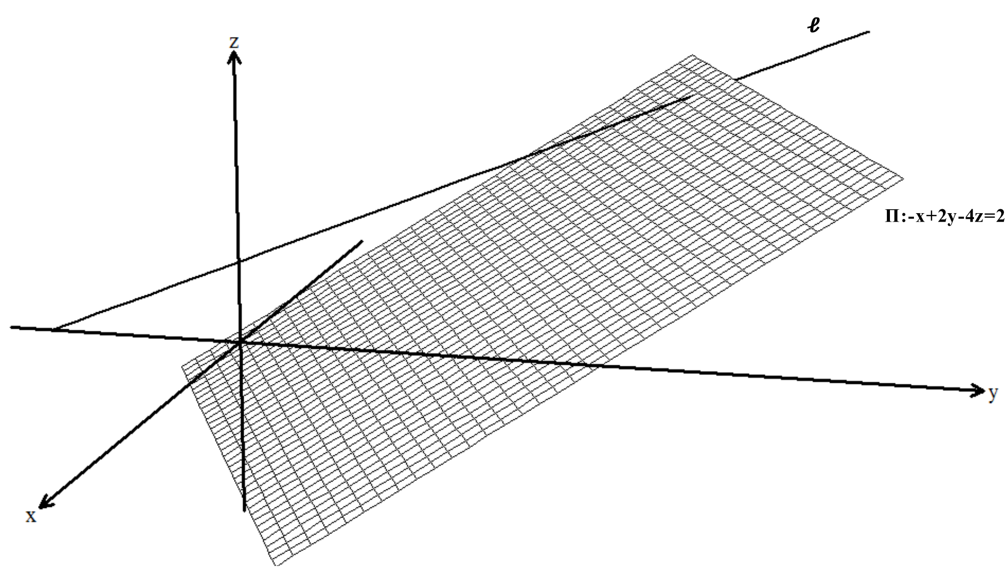


Figura 3.16: Recta $\ell : \frac{x-3}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z-4}{-1}$ que corta al plano $\pi : -x + 2y - 4z = 2$

Ejercicios Sección 3.2.1

En los ejercicios 1 a 8 encuentre la ecuación del plano que cumpla las condiciones en cada caso:

1. Pasa por el punto $(1, 2, -2)$ y es perpendicular al vector $\langle 2, -2, 3\rangle$.
2. Pasa por el punto $(-2, 6, -2)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
3. Contiene al punto $(0, 4, -3)$ y tiene vector normal $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
4. Contiene al punto $(1, -2, 4)$ y tiene vector normal $\langle 3, -1, 6\rangle$.
5. Pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y es paralelo al plano $3x - y + z = 0$.
6. Pasa por el origen y es paralelo al plano x - 2y + 3z = 12.
7. Contiene el punto $(-2, 2, -6)$ y es perpendicular a la recta $\ell : \mathbf{r} = \langle 2 - 3t, 4t, -t\rangle$.
8. Pasa por el punto $(2, -4, 5)$ y es perpendicular a los vectores $\langle 1, -1, 2\rangle$ y $\langle 3, 5, -1\rangle$.
9. Dados los puntos $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(-1, 1, 0)$ demuestre que los puntos determinan un plano y encuentre la ecuación del plano.
10. Encuentre, si es posible, la ecuación del plano que contiene los puntos $(3, 5, 2)$, $(2, 3, 1)$ y $(-1, -1, 4)$.
11. Encuentre, si es posible, la ecuación del plano que contiene los puntos $(1, 1, 0)$, $(3, 0, 0)$ y $(0, -1, 0)$.
12. Encuentre la ecuación del plano que contiene a las rectas $\ell_1 : r_1 = \langle 1+3t, 1-t, 2+t\rangle$ y $\ell_2 : r_2 = \langle 4 + 4s, 2s, 3 + s\rangle$.
13. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto $(2, 1, -4)$ y a la recta $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{2-2y}{-4} = \dfrac{z}{3}$.
14. Encuentre la ecuación del plano que contenga al punto $(5, -5, 1)$ y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(2, -3, 1)$ y $(3, -1, 2)$.
15. Dados los siguientes planos determine cuáles son perpendiculares y cuáles son paralelos.

    a) $4x - y + 3z = 1$
    b) $2x + 2y - 3z = 5$
    c) $-8x - 8y + 12z = 4$
    d) $2x + 4y + 4z = 7$
    e) $5x - 2y - 4z = 10$
    f) $-2x + y - 3z = 7$

16. Encuentre la recta de intersección de los planos dados:

    a) $5x - 4y - 9z = 8,$
    $2x + 8y + 6z = 8$

    b) $x - y + 3z = 3,$
    $x = 0$

17. En los planos del ejercicio 15 determine cuáles planos se cortan y encuentre la recta de intersección.

18. Dada la recta $x = 1 - 3t$, $y = 1 + t$ $z = 3 - 4t$ determine cuál de los siguientes planos es perpendicular o paralelo a la recta.

    a) $3x - y + 4z = 3$

    b) $2x + y + z = 0$

    c) $-6x + 2y - 8z = 2$

    d) $2x - 2y + z = 7$

19. Encuentre el punto de intersección de la recta $\ell : r = \langle 2 + 2t, 5 - 5t, 3 + 6t\rangle$ con el plano $x - 2y + z = 10$.

20. Determine en el ejercicio 18 a cuáles planos corta la recta y encuentre el punto de intersección.

21. Encuentre la ecuación del plano que contenga la recta $\ell : r = \langle 2 - t, 5 - 3t, 3 + 2t\rangle$ y sea perpendicular al plano $5x - 10y + 15z = 5$.

22. Encuentre la ecuación del plano que contenga el punto $(3, 1, -4)$ y que sea ortogonal a los planos $2x - 3y + 4z = 0$ y $x - y + 5z = 2$.

3.3 Distancias

En esta sección encontraremos algunas expresiones que nos permitirán calcular la distancia entre dos de los siguientes objetos geométricos del espacio: punto, recta y plano, siempre que tenga sentido calcularla. El cálculo de la distancia es en la mayoría de los casos un aplicación de la proyección vectorial de un vector sobre otro. Empezaremos con la distancia entre un punto y una recta.

3.3.1 Distancia de un punto a una recta

Consideremos un recta ℓ en el espacio y un punto P exterior a ella[11]. Sin pérdida de generalidad podemos graficar la situación como la Figura 3.17 a).

Para calcular la distancia entre el punto P y la recta ℓ, utilizaremos la proyección vectorial de un vector sobre otro; como la recta es conocida, se conoce de ella un vector director v y un punto Q. Con los puntos Q y P formaremos el vector QP.

[11] Si el punto está en la recta la distancia es cero.

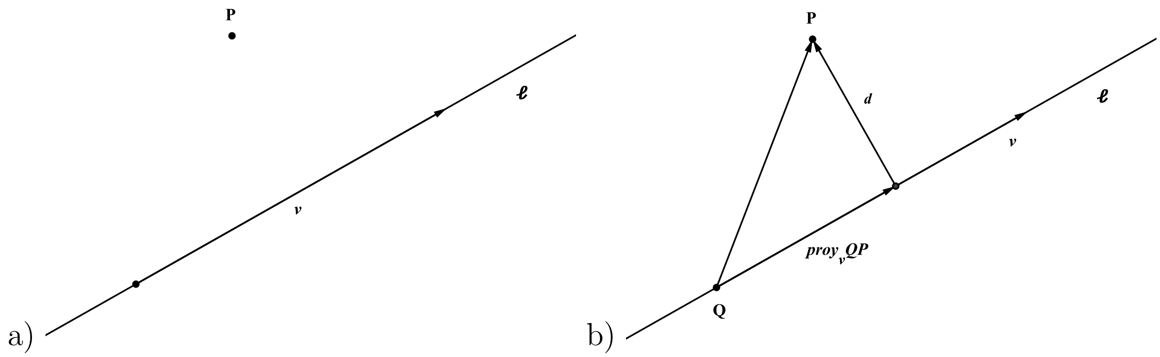


Figura 3.17: a) Punto exterior a una recta b) d representa la distancia de un punto a una recta

Notemos que el triángulo QMP es rectángulo y por lo tanto utlizando el teorema de pitágoras tenemos:

$$\| QP\|^2 = \|proy_v QP\|^2 + d^2$$

de donde, reemplazando $\|proy_v QP\|$ por $|comp_v QP|$ y despejando d obtenemos:

$$d = \sqrt{\|QP\|^2 - |comp_v QP|^2}, \tag{3.3.1}$$

y con la fórmula 3.3.1 podemos calcular la distancia de un punto a una recta.

Ejemplo 3.3.1 *Verifique que el punto $P = (1, -3, 1)$ no pertenece a la recta $\ell : \langle 3 - 2t, 4 + 5t, 8 - t\rangle$ y halle la distancia entre la recta ℓ y el punto.*

Solución

Veamos que el punto no está en la recta. Supongamos:

$$1 = 3 - 2t, \quad -3 = 4 + 5t, \quad 1 = 8 - t$$

Despejando t de la primera ecuación obtenemos $t = 1$ y de la segunda ecuación obtenemos $t = \frac{-7}{5}$, como el valor del parámetro t no es el mismo concluimos que el punto P no pertenece a la recta.

Para hallar la distancia, notemos que $Q = (3, 4, 8)$ es un punto sobre la recta y que $v = \langle -2, 5, -1\rangle$ es el vector director de la recta. Formemos el vector $QP = \langle 2, 7, 7\rangle$ y según la fórmula 3.3.1, tenemos:

$$d = \sqrt{\|QP\|^2 - |comp_v QP|^2},$$

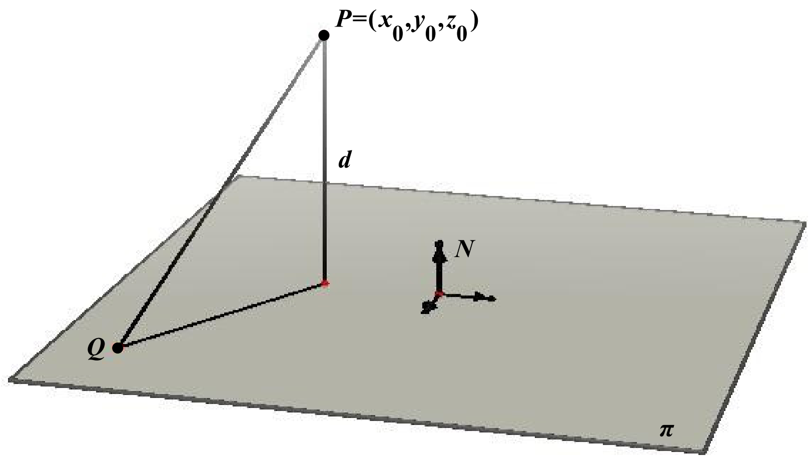


Figura 3.18: Distancia de un punto a un plano

de donde $\|QP\|^2 = 102$ y $|comp_v QP|^2 = \dfrac{26^2}{30} = \dfrac{338}{15}$, con eso la distancia del punto a la recta es:

$$d = \sqrt{102 - \frac{338}{15}} = \sqrt{\frac{1192}{15}},$$

luego la distancia del punto a la recta es $\sqrt{\frac{1192}{15}}$ unidades.

3.3.2 Distancia de un punto a un plano

Consideremos un plano π en el espacio y un punto P exterior al plano como muestra la Figura 3.18.

Para encontrar la distancia del punto al plano utilizaremos la proyección vectorial de un vector sobre otro vector. Como el plano es conocido, entonces conocemos un vector normal N y un punto Q. Con los puntos P y Q formaremos el vector PQ, podemos calcular la distancia del punto al plano de la siguiente manera:

$$d = \|Proy_N PQ\| = |Comp_N PQ| = \frac{|PQ \cdot N|}{\|N\|}$$

La Figura 3.18 muestra la distancia del punto al plano. Si el vector del plano es $N = \langle A, B, C\rangle$ en general la distancia se puede representar como sigue:

$$d = \frac{|PQ \cdot N|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.3.2}$$

Ejemplo 3.3.2 *Dados el plano* $\pi : 2x - 3y + z = 2$ *y el punto* $P = (1, 1, 1)$*. Verifique que el punto no pertenece al plano y halle la distancia del punto al plano.*

Solución

Verifiquemos que el punto no está en el plano. Reemplacemos $(1, 1, 1)$ en el plano, esto es:

$$2x - 3y + z = 2(1) - 3(1) + 1 = 0 \neq 2,$$

por tanto el punto no está en el plano.

Para calcular la ditancia del punto al plano sabemos que el vector normal de plano es $N = \langle 2, -3, 1\rangle$ y un punto[12] sobre el plano es $Q = (1, 0, 0)$. Ahora formemos el vector $PQ = \langle 0, 1, 1\rangle$, según la fórmula 3.3.2 la distancia del punto al plano está dada por:

$$d = \frac{|PQ \cdot N|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

La distancia del punto al plano es $\frac{2}{\sqrt{14}}$ unidades.

Si el punto P estuviera en el plano el vector PQ sería perpendicular al vector N, entonces el producto escalar $PQ \cdot N = 0$ y por tanto la distancia sería cero. Esta manera de ver el ejercicio puede servir para probar que un punto pertenece a un plano.

3.3.3 Distancia entre dos rectas paralelas

Consideremos dos rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 con v_1 y v_2 sus vectores directores respectivos. Ver Figura 3.19 a).

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas no coincidentes, tomaremos dos puntos P_1 y P_2 en ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente y formaremos el vector P_1P_2 como muestra la Figura 3.19 b). De esta manera podemos definir la distancia entre dos rectas paralelas como sigue

$$d = \sqrt{\|P_1P_2\|^2 - |Comp_v P_1P_2|^2} \tag{3.3.3}$$

[12]No necesarimente tiene que ser este punto, puede ser cualquiera que satisfaga la ecuación del plano.

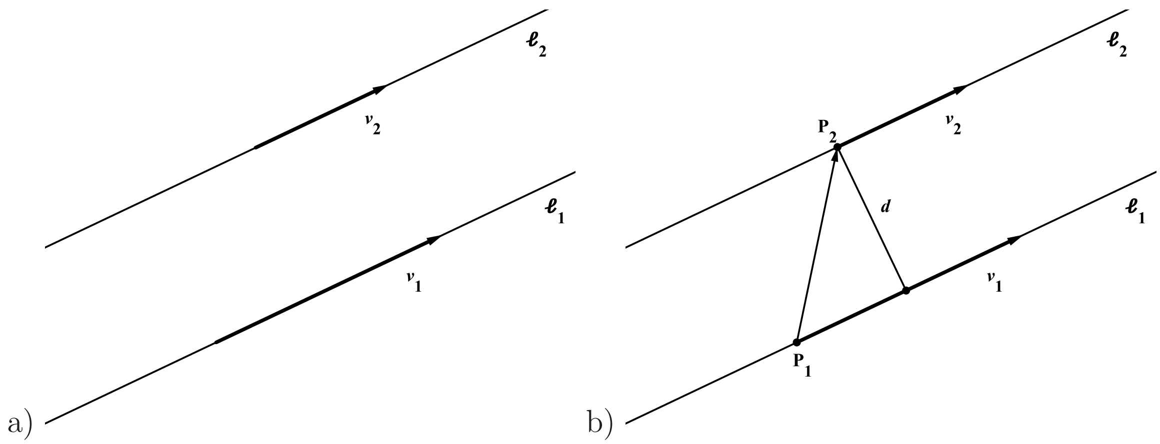


Figura 3.19: a) Rectas paralelas b) d Representa la distancia entre la dos rectas paralelas

Ejemplo 3.3.3 *Dadas las rectas*

$$\ell_1 : \alpha = \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{-1} = \frac{z}{3} \quad y \quad \ell_2 : \boldsymbol{r} = \langle 3+2t, 4+t, 1+3t \rangle$$

Verifique que las rectas son paralelas no coincidentes y halle la distancia entre ellas.

Solución

Los vectores directores de las rectas son respectivamente $v_1 = \langle 2, 1, 3 \rangle$ y $v_2 = \langle 2, 1, 3 \rangle$. Notemos que los vectores directores son iguales esto significa que las rectas son paralelas. Ahora sea $P_1 = (1, 1, 0)$ un punto sobre la recta ℓ_1 y $P_2 = (3, 4, 1)$ un punto sobre la recta ℓ_2 y formemos el vector $P_1P_2 = \langle 2, 3, 1 \rangle$

Para hallar la distancia entre las rectas usaremos la fórmula 3.3.3, en donde:

$$\|v_1\|^2 = 14 \quad \text{y} \quad |Comp_{v_1} P_1P_2|^2 = \frac{|P_1P_2 \cdot v|}{\|v_1\|} = \frac{10}{\sqrt{14}}$$

La distancia entre las rectas es $\frac{10}{\sqrt{14}}$ unidades.

3.3.4 Distancia entre una recta paralela a un plano y el plano

Sea ℓ una recta paralela[13] a un plano π con v y N sus respectivos vector director y vector normal.

[13]En este caso nos referimos a una recta que no está contenida en el plano.

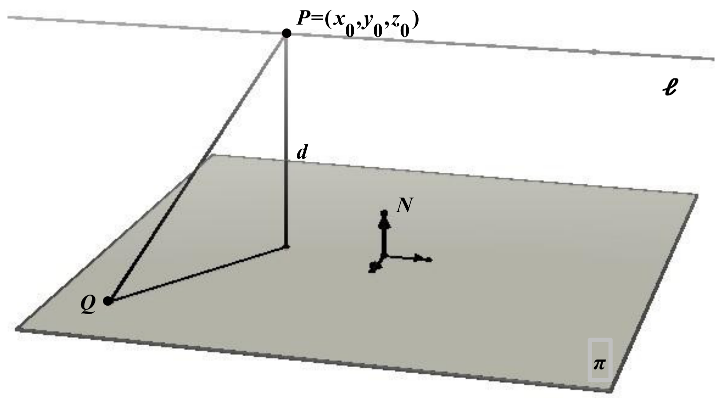


Figura 3.20: Distancia de una recta paralela a un plano y el plano

Para hallar la distancia entre el plano y la recta, tomaremos un punto P de la recta y un punto Q del plano y formaremos el vector PQ como muestra la Figura 3.20, de esta manera podemos definir la distancia del plano a la recta como

$$d = |Comp_N PQ| = \frac{|PQ \cdot N|}{\|N\|} \tag{3.3.4}$$

Ejemplo 3.3.4 *Dados el plano $\pi : 2x + 3y - 2z = 5$ y la recta $\ell : \boldsymbol{r} = \langle 4t, 2 - 2t, 3 + t\rangle$. Verifique que la recta es paralela al plano y halle la distancia del plano a la recta.*

Solución

Primero notemos que un vector director de la recta es $v = \langle 4, -2, 1\rangle$ y un vector normal al plano es $N = \langle 2, 3, -2\rangle$. La recta es paralela al plano si el vector v es perpendicular al vector normal N, veamos si esto es cierto. El producto escalar entre v y N es:

$$v \cdot N = \langle 4, -2, 1\rangle \cdot \langle 2, 3, -2\rangle = 8 - 6 - 2 = 0$$

Como el producto escalar es cero, entonces los vectores son perpendiculares, por tanto la recta es paralela al plano.

Hallemos ahora la distancia entre la recta y el plano, utilicemos la fórmula 3.3.4. Para esto notemos que un punto de la recta es $P = (0, 2, 3)$ y un punto del plano es $Q = (\frac{5}{2}, 0, 0)$, el vector $PQ = \langle \frac{5}{2}, -2, -3\rangle$, con esto:

$$d = \frac{|PQ \cdot N|}{\|N\|} = \frac{|\langle \frac{5}{2}, -2, -3\rangle \cdot \langle 2, 3, -2\rangle|}{\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{17}}$$

la distancia del plano a la recta es $\frac{5}{\sqrt{17}}$ unidades.

Observaciones

1. La fórmula 3.3.3 claramente es cero si las rectas son coincidentes. Es decir, la distancia entre las rectas paralelas coincidentes es cero.
2. La fórmula 3.3.4 claramente es cero cuando la recta ℓ está contenida en el plano π.

Ejercicios Sección 3.3.1

1. En los siguientes ejercicios calcule la distancia del punto a la recta

   a) $(-2,-3,1)$ y
   $\ell : r = \langle 2-3t, 1+2t, 5t\rangle$

   b) $(1,1,-1)$ y
   $\ell : t = \dfrac{2x-4}{2} = \dfrac{2y-6}{-2} = \dfrac{4-2z}{4}$

   c) $(2,1,-1)$ y
   $\ell : r = \langle 2-t, 1+t, 4-4t\rangle$

   d) $(1,1,-1)$ y
   $\ell : s = \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{4-z}{4}$

2. En los siguientes ejercicios calcule la distancia del punto al plano.

   a) $(-2,-3,1)$ y
   $x+y+z=0$

   b) $(1,1,-1)$ y
   $2x-3y+4z=2$

   c) $(2,1,-1)$ y
   $x-y+z=0$

   d) $(1,1,-1)$ y
   $2x-3y+z=-2$

3. En los siguientes ejercicios calcule la distancia entre las dos rectas paralelas.

   a) $\ell_1 : r = \langle 2+2t, 1+2t, -4t\rangle$ y $s = \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{4-z}{4}$

   b) $\ell_1 : r = \langle 1+3t, -1-2t, 2-3t\rangle$ y $s = \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{2-y}{2} = \dfrac{4-z}{-3}$

   c) $\ell_1 : r = \langle 1+t, 1-t, 3-2t\rangle$ y $s = x-4 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{4-2z}{4}$

   d) $y = x$ y $y = x, z = 6$

4. En los siguientes ejercicios calcule la distancia entre la recta paralela al plano y el plano.

   a) $\ell_1 : r = \langle 2+2t, 1+2t, -4t\rangle$ y $-3x+5y+z=0$

   b) $s = \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{2-y}{2} = \dfrac{4-z}{-3}$ y $x+15y+9z=6$

c) $\ell_1 : r = \langle 1+t, 1-t, 3-2t \rangle$ y $x - 3y + 2z = 4$

d) $y = 2x = -\frac{z}{2}$ y $2x + y - 4z = 1$

5. Demuestre que la distancia de un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a un plano con ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ está dada por la siguiente fórmula.

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.3.5}$$

6. Utilice la fórmula de distancia dada en 3.3.5 para calcular las distancias en el ejercicio 2.

7. Demuestre que la fórmula de distancia entre dos planos paralelos es:

$$\frac{|D_1 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.3.6}$$

8. Utilice la fórmula 3.3.6 para calcular la distancia entre los planos paralelos.

a) $2x - 3y + z = 1$ y
$6x - 9y + 3z = 4$

b) $x - y - z = 1$ y
$-3x + 3y + 3z = 8$

9. Demuestre que la distancia entre dos rectas oblicuas está dada por la fórmula:

$$|Comp_{PQ} RQ| = \frac{|PQ \cdot RQ|}{\|PQ\|},$$

donde R y P pertenecen a una de las rectas y Q pertenece a la otra.

Ejercicios Capítulo 3

1. En cada caso halle ecuaciones parámetricas y simétricas de la recta.

   a) Qué pasa por el origen y es paralela al eje x
   b) Qué pasa por el origen y es paralela al eje y
   c) Qué pasa por el origen y es paralela al eje z
   d) Qué pasa por el origen y es paralela a la recta $x-1=y+2=z$
   e) Qué pasa por el punto $(1,-1,-2)$ y es paralela al eje z
   f) Qué pasa por el punto $(2,-2,3)$ y es perpendicular al plano xz
   g) Qué pasa por el punto $(0,2,3)$ y es perpendicular al plano xy
   h) Qué pasa por el punto $(2,-2,3)$ y es perpendicular al plano $x+y+z=1$
   i) Qué pasa por el punto $(4,2,-6)$ y es paralela a los planos xy y xz

2. ¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta determinada por los puntos $(2,3,-1)$ y $(-2,1,-1)$?

   a) $(-2,1,-1)$
   b) $(-2,-1,-1)$
   c) $(-3,2,-1)$
   d) $(6,5,-1)$
   e) $(-2,1,1)$
   f) $(-6,-1,-1)$

3. Para los puntos del ejercicio 2, que no pertenecen a la recta, halle la distancia del punto a la recta.

4. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,0,1) y es perpendicular a cada una de las rectas $\mathbf{r}=\langle 1-2t, 4+3t, 2-6t\rangle$ y $\frac{1-x}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$.

5. En cada caso halle la ecuación de la recta determinada por la intersección de los planos.

   a) $2x-y+z=0$ y $-x+y+z=10$
   b) $x+y-2z=5$ y $3x-2y+z=6$

6. En cada caso halle la ecuación analítica del plano.

   a) Determinado por los tres puntos no colineales $(1,2,-2)$, $(-5,5,10)$ y $(0,1,-1)$
   b) Determinado por el vector perpendicular al plano $\mathbf{v}=\langle 1,-4,3\rangle$ y el punto $(2,-3,4)$
   c) Paralelo al plano $5x-2y+4z=10$ y contiene el punto $(2,2,-1)$

d) Perpendicular a las rectas $\mathbf{r} = \langle 2-t, 4+t, 2-3t\rangle$ y $\frac{1+x}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{1-z}{-2}$ y contiene al origen

e) Perpendicular a la recta de intersección de los planos $x - y + z = 4$ y $2x + 3y - z = 2$ y que pasa por el punto $(0, 1, 0)$

7. En cada caso determine si el punto pertenece al plano $5x + 20y + 10z = -5$.

   a) $(1, 1, -3)$
   b) $(5, 20, 10)$
   c) $(-1, 1/2, -1)$
   d) $(6, 7, 9)$

8. En los puntos del ejercicios 7 que sean exteriores al plano hallar la distancia del punto al plano.

9. Dados los vectores $\mathbf{a} = \langle 2, -3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 7, -2, 3\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 9, -5, 7\rangle$. Determine si son coplanares, y si lo son, halle el plano deteminado por ellos.

10. Dados los vectores $\mathbf{a} = \langle -3, 1, 8\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, -3, 5\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 2, 11, -4\rangle$. Determine si son coplanares y si lo son halle el plano deteminado por ellos.

11. Hallar la ecuación del plano que tiene traza con el plano xz a la recta $3x - 5z = 10$ y pasa por el punto $(1, 4, 5)$.

12. Verifique que la recta determinada por los planos $7x - y - z + 8 = 0$ y $3x + 5y - 2z - 3 = 0$ está contenida en el plano $5x - 17y + 4z + 25 = 0$.

13. Hallar la distancia entre los planos paralelos $4x - 2y + 5z - 30 = 0$ y $4x - 2y + 5z - 14 = 0$.

14. Hallar la ecuación del plano que contiene al punto (-1,2,1) y que es perpendicular al plano que tiene ecuación $x - 2y + 4z - 2 = 0$ y es paralelo a la recta de intersección entre los planos $4x - 5y - z = 7$ y $2x + y - 3z = 1$.

15. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (2,1,-3) y contiene la recta $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

16. Encuentre el punto de intersección entre el plano $3x - 2y + z = 1$ y la recta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 2 + 4t$.

17. Encuentre la ecuación del plano que contenga las rectas paralelas que tienen ecuaciones paramétricas $x = 2 + t$, $y = 3 + 2t$, $z = t$ y $x = 2 + s$, $y = -1 + 2s$, $z = 2 + s$.

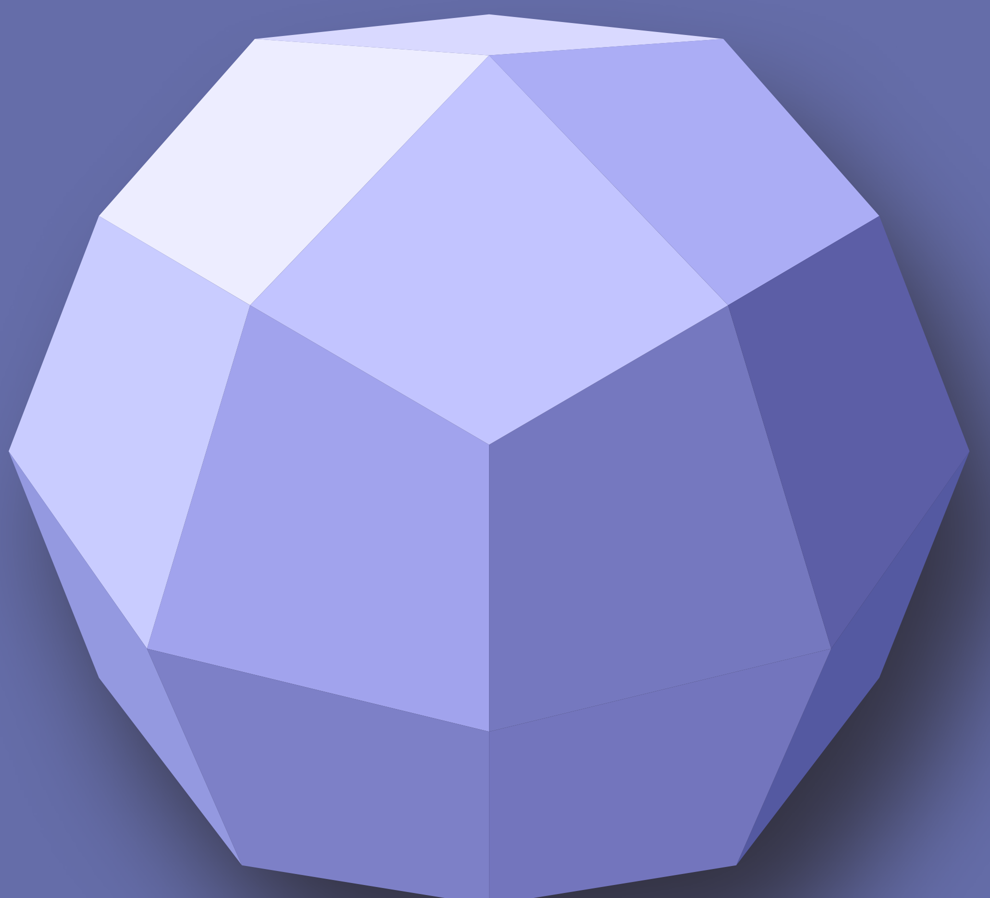
18. Encuentre la ecuación del plano que contenga la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + 2z = 2$.

19. Hallar la ecuación de la recta que está contenida en el plano $3x - y + 5z = 8$, contiene el punto (2,3,1) y es perpendicular a la recta $3x - 1 = 2y + 5 = -z$.

20. Hallar la ecuación del plano perependicular al plano $3x+y+9z = 6$ y que contiene la recta $x - y + 3z = 2, y = 0$.

CAPÍTULO 4

TRANSFORMACIÓN DE COODENADAS



CAPÍTULO 4
TRANSFORMACIÓN DE COODENADAS

Las traslaciones pueden entenderse como movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño de las figuras u objetos trasladados, a las cuales deslizan según un vector. Las traslaciones, así como las rotaciones, son parte de un conjunto de transformaciones en el plano y en el espacio, con aplicaciones fuertes y directas en informática gráfica entre otras.

El tratamiento detallado de las rotaciones ha sido objeto de numerosos trabajos matemáticos, que abordan el problema desde diversos puntos de vista y grados de sofisticación: cuaterniones, matrices, operadores vectoriales, teoría de grupos. Todos estos enfoques son matemáticamente equivalentes y se pueden derivar unos de otros, salvo en algunos aspectos concretos y posibles resultados redundantes, y la elección de uno u otro depende del problema concreto.

Con la llegada de la robótica y los gráficos informáticos, la matemática de las rotaciones y las traslaciones ha cobrado un nuevo impulso y ha pasado a ser una materia de estudio muy activo, con particular énfasis en el enfoque basado en cuaterniones.

En matemáticas, las rotaciones son transformaciones lineales que conservan las normas (es decir, son isométricas) en espacios vectoriales en los que se ha definido una operación de producto interior y cuya matriz tiene la propiedad de ser ortogonal y de determinante igual a ± 1. Si el determinante es $+1$ se llama rotación propia y si es -1, además de una rotación propia hay una inversión o reflexión y se habla de rotación impropia.

El OBJETIVO de este capítulo es que el estudiante logre:

- Aprender a reconocer un sistema de referencia
- Graficar curvas en su sistema de referencia y en el sistema de referencia trasladado
- Graficar curvas en su sistema de referencia y en el sistema de referencia rotado

- Calcular ecuaciones de curvas en sistemas de referencia natural y en el sistema trasladado
- Calcular ecuaciones de curvas en sistemas de referencia natural y en el sistema rotado
- Identificar en la ecuación de una curva si hay una rotación o traslación, y recuperar la ecuación en el sistema de referencia más simple

A continuación desarrollaremos los conceptos básicos de transformación de coordenadas en el plano y en el espacio.

4.1 Traslación de ejes

Se pueden utilizar algunos "artificios" para poder expresar ecuaciones de curvas, que no se encuentran en su posición ordinaria, de tal manera que se puedan identificar y trazar de una forma más simple. Uno de estos "artificios" es la *transformación de coordenadas*.

Una *transformación* es una operación que hace que una relación, expresión o figura se cambie por otra siguiendo una ley específica. Esta ley se expresa mediante ecuaciones llamadas *ecuaciones de transformación*. Una ecuación de una curva puede transformarse por medio de una *traslación de ejes* y/o una *rotación de ejes*.

4.1.1 Traslación de ejes en el plano

Sean:
$O(0,0)$ el origen de coordenadas del sistema original $(x\ y)$ $O'(h,k)$ el origen del nuevo sistema de coordenadas $(x'\ y')$ P un punto en el plano de coordenadas (x,y) respecto al sistema original $(x\ y)$ y de coordenadas (x',y') respecto al nuevo sistema $(x'\ y')$
$\mathbf{R} =< x,y >$ el vector posición del punto P respecto a O $\mathbf{R}' =< x',y' >$ el vector posición de P respecto a O' $\mathbf{R_0} =< h,k >$ el vector posición de O' respecto a O (Ver Figura 4.1). Aplicando el algebra vectorial tenemos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R_0} + \mathbf{R}',$$

sustituyendo ahora las componentes de los vectores

$$< x,y >=< h,k > + < x',y' >,$$

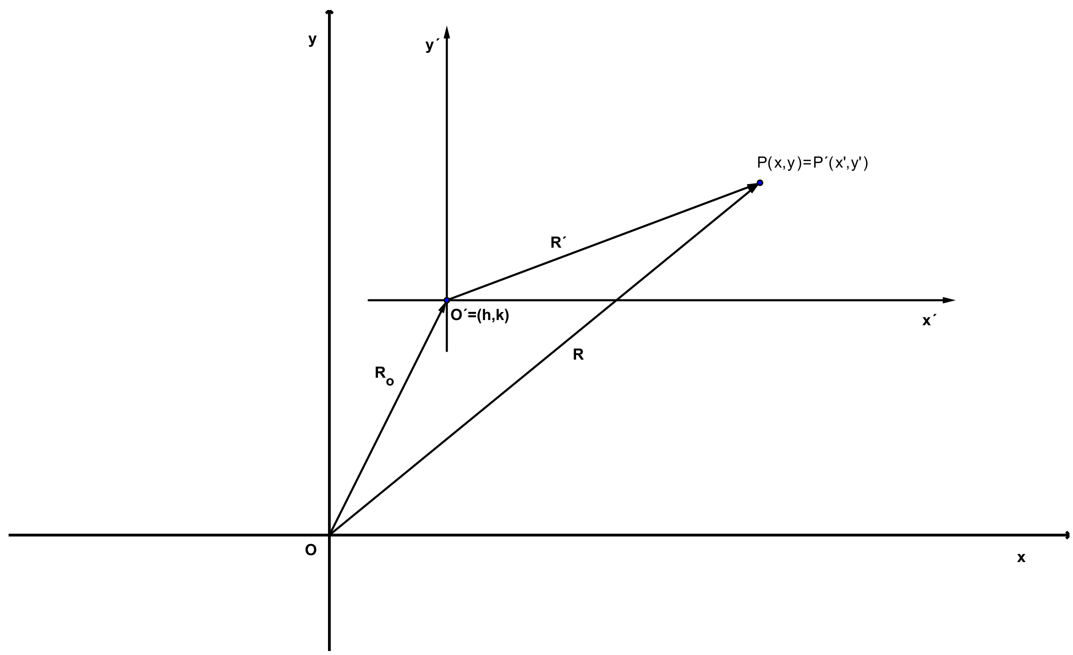


Figura 4.1: Traslación de ejes en el plano

usando la igualdad de vectores obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= h + x' \\ y &= k + y' \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Estas son las ecuaciones de trasformación de traslación de ejes. De la ecuación 4.1.1 se tiene que:

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Estas son las ecuaciones de trasformación inversa de traslación de ejes, es decir, del sistema $x'y'$ al sistema $x\,y$.

Ejemplo 4.1.1 *Transforme la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ trasladando los ejes coordenados a uno nuevo con origen en $(-1, 3)$.*

Solución

De la ecuación 4.1.1 se tiene:

$$x = x' - 1, \qquad y = y' + 3$$

sustituyendo los valores de x y y en la ecuación dada tenemos:

$$(x' - 1)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 1) - 6(y' + 3) + 6 = 0$$

Desarrollando se obtiene:

$$(x')^2 - 2x' + 1 + (y')^2 + 6y' + 9 + 2x' - 2 - 6y' - 18 + 6 = 0,$$

simplificando la expresión:

$$(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0$$

Obsérvese que la expresión obtenida no tiene términos lineales, lo cual, es lo que se busca con la traslación de ejes coordenados. Esta traslacioón se muestra en la Figura 4.2.

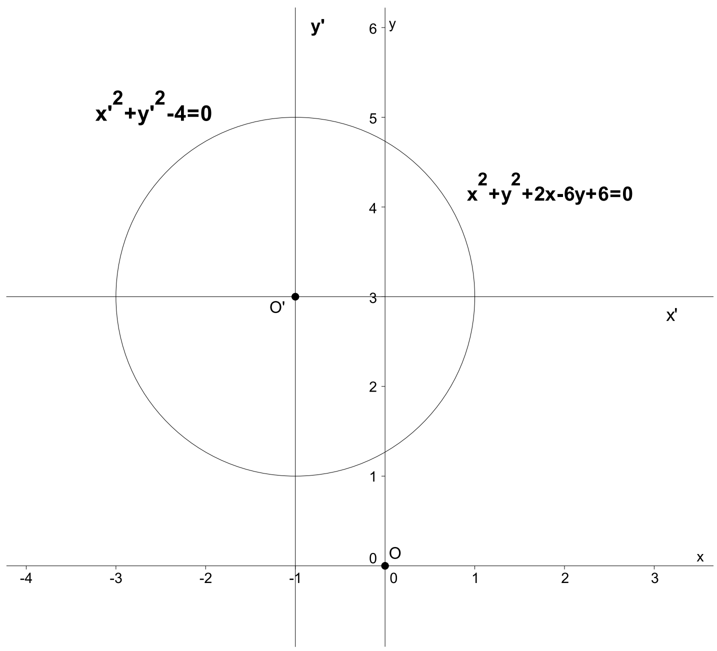


Figura 4.2: Traslación de ejes de la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

Ejemplo 4.1.2 *Simplifique la ecuación* $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$ *mediante una traslación de ejes.*

Solución

A partir de la ecuación 4.1.1 y sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$3(x' + h)^2 - 2(y' + k)^2 - 42(x' + h) - 4(y' + k) + 133 = 0$$

desarrollando la expresión da:

$$3(x')^2 + 6x'h + 3h^2 - 2(y')^2 - 4y'k - 2k^2 - 42x' - 42h - 4y' - 4k + 133 = 0 \quad (4.1.3)$$

Ahora debemos buscar los valores de h y k que anulen los términos en x' y y', esto es:

$$6hx' - 42x' = 0$$

$$-4ky' - 4y' = 0$$

luego $h = 7$ y $k = -1$, reemplazando estos valores en la ecuación (4.1.3) y simplificando se tiene:

$$3(x')^2 - 2(y')^2 - 12 = 0$$

La gráfica de la ecuación con su traslación se muestra en la Figura 4.3.

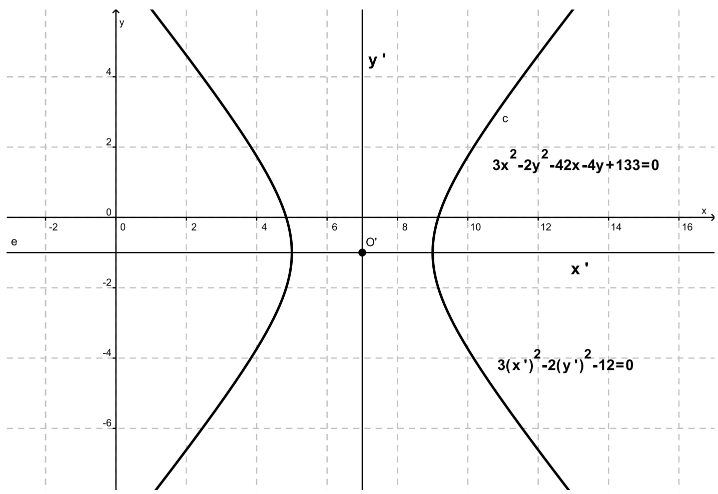


Figura 4.3: Traslación de la ecuación $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$

4.1.2 Traslación de ejes en el espacio

Sean: $O(0,0,0)$ el origen de coordenadas del sistema original $(x\ y\ z)$ $O'(h,k,l)$ el origen del nuevo sistema de coordenadas $(x'\ y'z')$ P un punto en el espacio de coordenadas (x,y,z) respecto al sistema original $(x\ y\ z)$ y de coordenadas (x',y',z') respecto al nuevo sistema $(x'\ y'y')$ $\mathbf{R} =< x,y,z >$ el vector posición del punto P respecto a O $\mathbf{R}' =< x',y',z' >$ el vector posición de P respecto a O' $\mathbf{R_0} =< h,k,l >$ el vector posición de O' respecto a O' (Ver Figura 4.4).
Aplicando el algebra vectorial tenemos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R_0} + \mathbf{R}'$$

sustituyendo las componentes de los vectores da:

$$< x,y,z >=< h,k,l > + < x',y',z' >$$

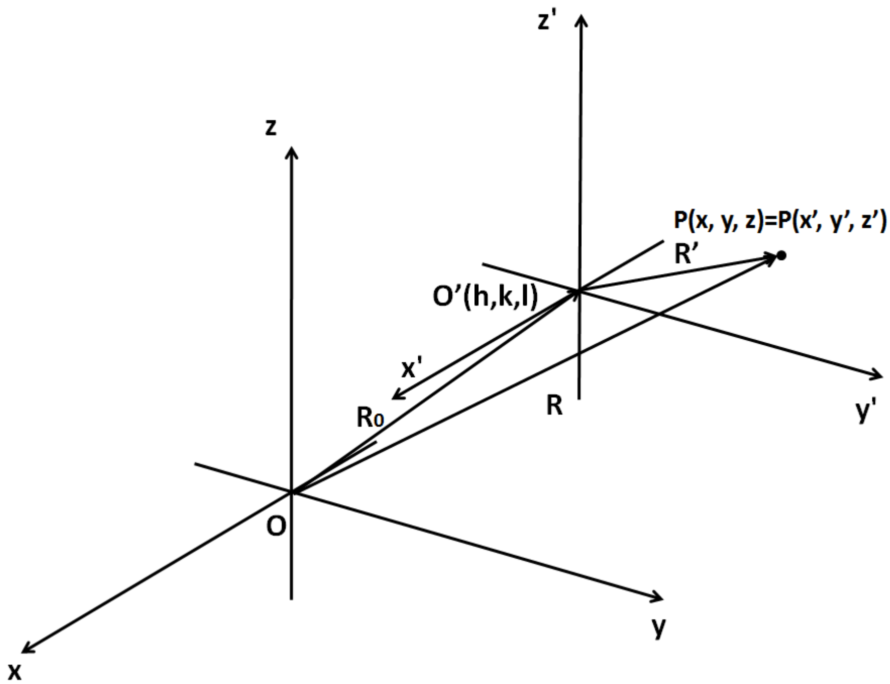


Figura 4.4: Traslación de ejes en el espacio

usando la igualdad de vectores obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= h + x' \\ y &= k + y' \\ z &= l + z' \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Estas son las ecuaciones de trasformación de traslación de ejes. De la ecuación 4.1.4 se tiene para x, y y z que:

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \\ z' &= z - l \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Estas son las ecuaciones de trasformación inversa de traslación de ejes, es decir, del sistema $x'y'z'$ al sistema $x\,y\,z$.

Ejemplo 4.1.3 *Transformar la ecuación* $x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x + 4y + 24z = 31$ *mediante una traslación de ejes al nuevo origen* $(1, -2, 3)$.

Solución

A partir de las ecuaciones 4.1.4 se tiene:

$$x = 1 + x'$$

$$y = -2 + y'$$

$$z = 3 + z'$$

sustituyendo los valores de x, y y z en la ecuación dada tenemos:

$$(1 + x')^2 + (-2 + y')^2 - 4(3 + z')^2 - 2(1 + x') + 4(-2 + y') + 24(3 + z') = 31$$

desarrollando y simplificando la expresión, obtenemos:

$$(x')^2 + 2x' + 1 + (y')^2 - 4y' + 4 - 4(z')^2 - 24z' - 36 - 2 - 2x' - 8 + 4y' + 72 + 24z' = 31$$

$$(x')^2 + (y')^2 - 4(z')^2 = 0$$

La gráfica de la situación se muestra en la Figura 4.5

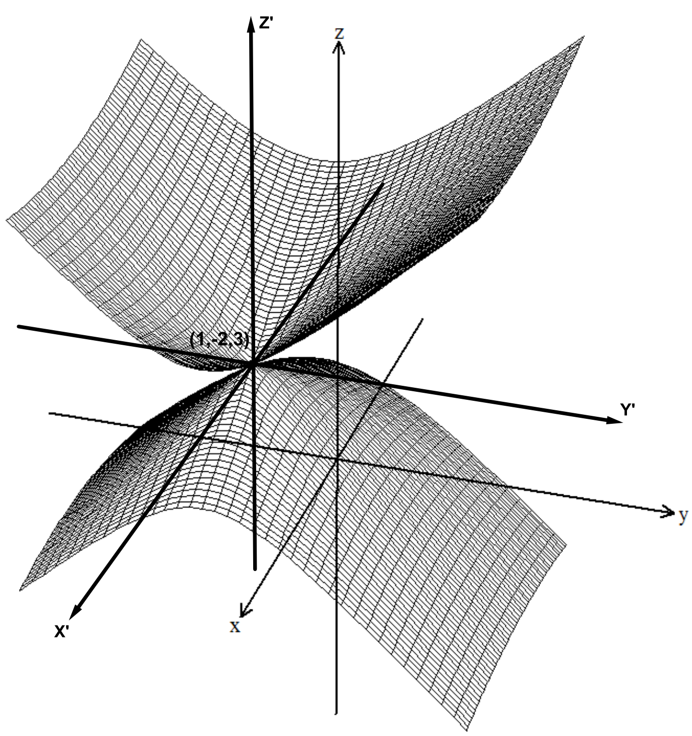


Figura 4.5: Traslación de ejes al punto $(1, -2, 3)$ de la ecuación $x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x + 4y + 24z = 31$

Observación

Note que el problema puede ser simplificado si conocemos el punto de traslación, factorizando la expresión en las variables x, y e z y después usar las fórmulas de traslación. Por ejemplo, en el ejercicio anterior tenemos la ecuacion:

$$x^2 + y^2 - 4z^2 - 2x + 4y + 24z = 31$$

completando cuadrados y factorizando en cada variable x, y e z se obtiene:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + -4(z-3)^2 = 0$$

que significa que las fórmulas de traslación quedan definidas por $x\,' = x - 1$, $y\,' = y + 2$ y $z\,' = z - 3$, con punto de traslación definido como $P = (h, k, l) = (1, -2, 3)$. Igual que en el ejercicio anterior.

Ejercicios Sección 4.1.1

1. Transforme cada ecuación dada mediante una traslación de ejes para que la gráfica de la ecuación tenga su centro o vértice en el origen del nuevo sistema de coordenadas.

a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4x + 18y + 20 = 0$

b) $2x^2 - 3y^2 - z^2 - 4x + 12y + 4z - 19 = 0$

c) $5x^2 + 4y^2 - 10x + 16y - 4z + 20 = 0$

d) $9x^2 - 4y^2 - 8y - 5z - 14 = 0$

2. Emplee una traslación de coordenadas para eliminar los términos de primer grado de la ecuación $xy + 4x - 8y + 6 = 0$.

3. Se da a los puntos $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$ las nuevas coordenadas (x_1', y_1') y (x_2', y_2'), mediante una traslación de ejes verifique que:

$$\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

4.2 Rotación de ejes

4.2.1 Rotación de ejes en el plano

Si se rotan los ejes de coordenadas, alrededor del origen del sistema coordenado original, y teniendo en cuenta que cada punto del plano está fijo, entonces cada punto, excepto el origen coordenadas, que es el mismo para el nuevo sistema, tendrá nuevas coordenadas respecto al nuevo sistema.

Para encontrar las ecuaciones de transformación procedemos como se muestra a continuación.

Sean:

- x, y los ejes coordenados originales
- x', y' los ejes coordenados del nuevo sistema
- α el ángulo de rotación del nuevo sistema respecto al sistema original
- β el ángulo que forma el vector posición $\mathbf{R}$ respecto al nuevo sistema
- $|\mathbf{R}| = r$, la magnitud del vector posición $\mathbf{R}$ (Ver Figura 4.6)

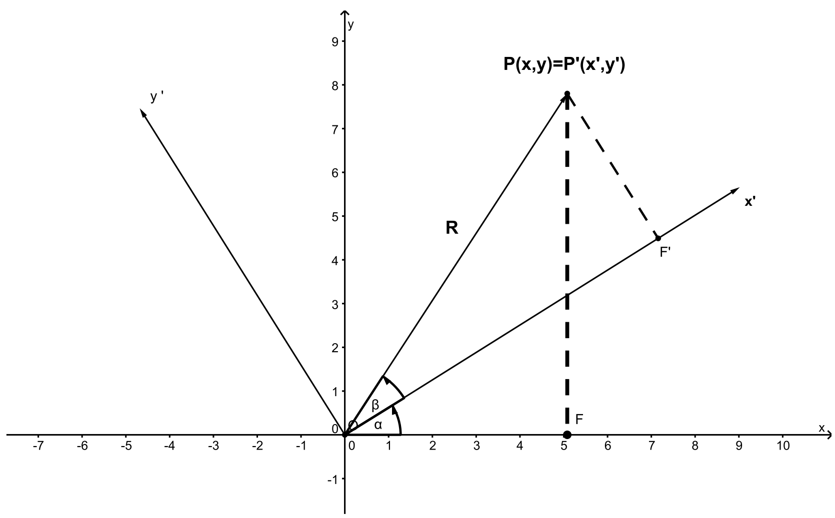


Figura 4.6: Rotación de ejes

Utilizando la trigonometría tenemos que:

$$x = \overline{OF} = r\cos(\alpha + \beta)$$

$$y = \overline{FP} = r\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta)$$

$$x' = r\cos\beta$$

$$y' = r\,\mathrm{sen}\,\beta$$

resolviendo, se obtiene:

$$x = r\cos\alpha\cos\beta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

sustituyendo el valor de r, se tiene:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha$$

En forma análoga

$$y = r \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + r \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

sustituyendo el valor de r, da:

$$y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Estas son las ecuaciones de transformación directa por rotación de ejes. En forma similar, se pueden encontrar las ecuaciones de transformación inversa por rotación de ejes, las cuales son:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha \\ y' &= -x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Ejemplo 4.2.1 *Transforme la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ por rotación de ejes, girando los ejes coordenados un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad.*

Solución

A partir de las ecuaciones 4.2.1 tenemos:

$$x = x' \cos\tfrac{\pi}{4} - y' \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$y = x' \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + y' \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'$$

sustituyendo en la ecuación dada obtenemos:

$$\begin{aligned} &(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y')^2 - 2(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y')(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y') \\ &+(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y')^2 - (\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y') = 0 \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\tfrac{1}{2}(x')^2 - x'y' + \tfrac{1}{2}(y')^2 - (x')^2 + (y')^2 + \tfrac{1}{2}(x')^2 + x'y' + \tfrac{1}{2}(y')^2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y' = 0$$

simplificando tenemos:

$$2(y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = 0$$

y observemos que al simplificar la expresión inicial desaparece el término cruzado xy, que es el objetivo en la rotación de ejes.

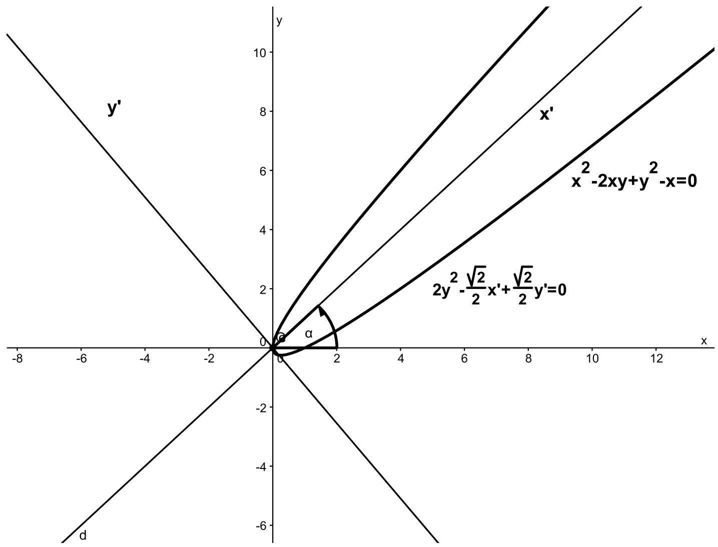


Figura 4.7: Rotación de ejes de la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ un ángulo $\frac{\pi}{4}$ rad

Ejemplo 4.2.2 *Simplifique la ecuación* $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ *con una rotación de ejes.*

Solución

A partir de las ecuaciones 4.2.1 y sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}&(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)\\&+(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 4 = 0\end{aligned}$$

desarrollando, tenemos:

$$\begin{aligned}&(x')^2\cos^2\alpha - 2x'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + (y')^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2(x')^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\\&-2x'y'\cos^2\alpha + 2x'y'\operatorname{sen}^2\alpha + 2(y')^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + (x')^2\operatorname{sen}^2\alpha\\&+2x'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + (y')^2\cos^2\alpha - 4 = 0\end{aligned}$$

Debemos buscar el valor de α tal que los términos $x'y'$ desaparezcan de la ecuación, esto es:

$$-2x'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 2x'y'\cos^2\alpha + 2x'y'\operatorname{sen}^2\alpha + 2x'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0$$

simplificando,

$$-2x'y'\cos^2\alpha + 2x'y'\operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

como $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ se tiene,

$$2\cos 2\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

solucionando para α obtenemos:

$$\alpha = 45°$$

reemplazando ahora el valor de α en la expresión desarrollada y eliminando los términos cruzados, tenemos:

$$\begin{aligned}&(x')^2\cos^2(45°) + (y')^2\operatorname{sen}^2(45°) - 2(x')^2\cos(45°)\operatorname{sen}(45°)\\&+2(y')^2\cos(45°)\operatorname{sen}(45°) + (x')^2\operatorname{sen}^2(45°) + (y')^2\cos^2(45°) - 4 = 0\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(x')^2 + \tfrac{1}{2}(y')^2 - (x')^2 + (y')^2 + \tfrac{1}{2}(x')^2 + \tfrac{1}{2}(y')^2 - 4 = 0$$

simplificando, se obtiene que:

$$(y')^2 = 2$$

La ecuación simplificada es $y' = \pm\sqrt{2}$ con un ángulo de rotación $\alpha = 45°$.

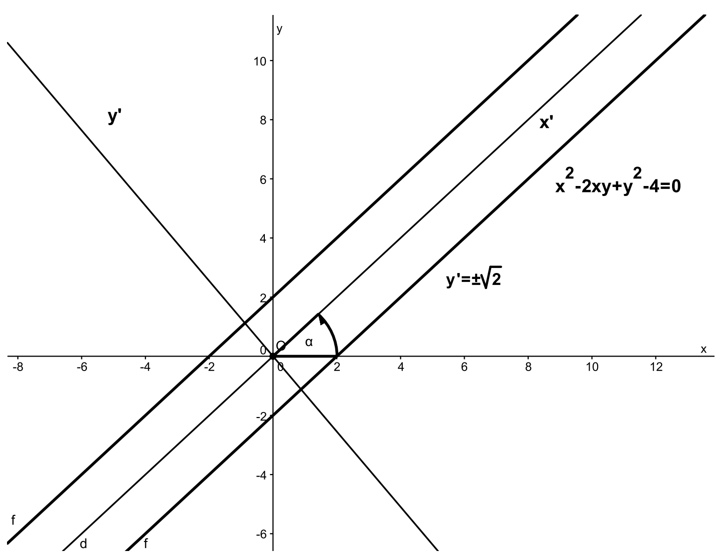


Figura 4.8: Rotación de ejes de la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$

4.2.2 Rotación de ejes en el espacio

Sean:

- x, y, z los ejes coordenados originales
- x', y', z' los ejes coordenados del nuevo sistema
- P un punto en el espacio de coordenadas (x, y, z) respecto al sistema
- original $(x\ y\ z)$ y de coordenadas (x', y', z') respecto al nuevo sistema $(x'\ y'y')$
- $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ los ángulos directores del eje x' respecto a los ejes x, y, z
- $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ los ángulos directores del eje y' respecto a los ejes x, y, z
- $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ los ángulos directores del eje z' respecto a los ejes x, y, z

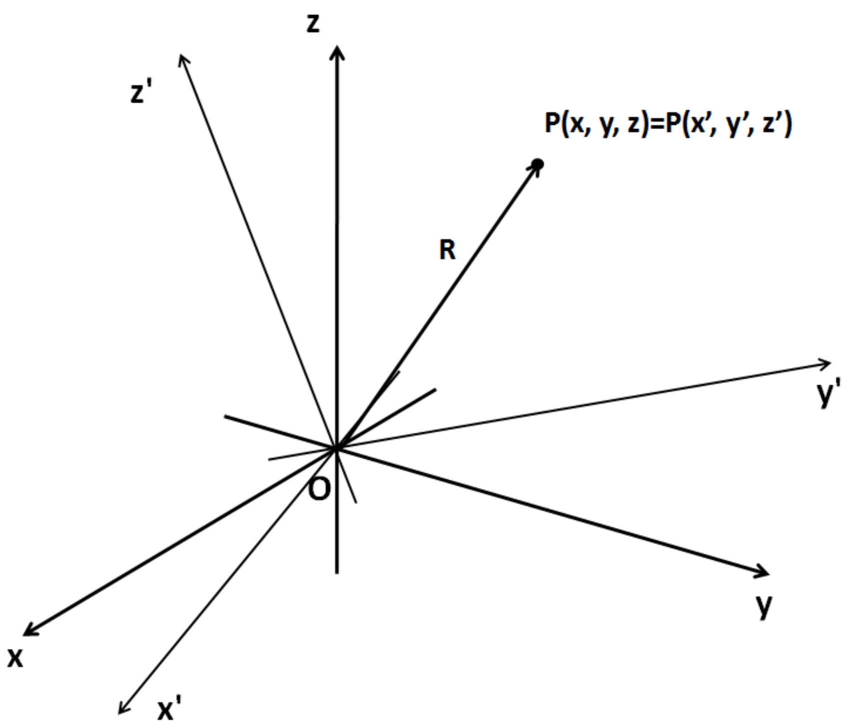


Figura 4.9: Rotación de ejes en el espacio

El vector posición de P es $\mathbf{R} = \langle x, y, z\rangle = \langle x', y', z'\rangle$ o de forma alterna $\mathbf{R} = xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k'$, siendo i, j, k los vectores unitarios sobre los ejes x, y, z y i', j', k' los vectores unitarios sobre los ejes x', y', z', respectivamente.

Utilizando los cosenos directores se obtiene que:

$$i' = (\cos\alpha_1)i + (\cos\beta_1)j + (\cos\gamma_1)k$$
$$j' = (\cos\alpha_2)i + (\cos\beta_2)j + (\cos\gamma_2)k$$
$$k' = (\cos\alpha_3)i + (\cos\beta_3)j + (\cos\gamma_3)k$$

Reemplazando las expresiones anteriores en el vector **R**, e igualando componentes tenemos:

$$\begin{aligned} x &= (\cos\alpha_1)x' + (\cos\alpha_2)y' + (\cos\alpha_3)z' \\ y &= (\cos\beta_1)x' + (\cos\beta_2)y' + (\cos\beta_3)z' \\ z &= (\cos\gamma_1)x' + (\cos\gamma_2)y' + (\cos\gamma_3)z' \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Estas son las ecuaciones de transformación directa por rotación de ejes en el espacio. De forma análoga, se obtiene las ecuaciones de transformación inversa, que son:

$$\begin{aligned} x' &= (\cos\alpha_1)x + (\cos\beta_1)y + (\cos\gamma_1)z \\ y' &= (\cos\alpha_2)x + (\cos\beta_2)y + (\cos\gamma_2)z \\ z' &= (\cos\alpha_3)x + (\cos\beta_3)y + (\cos\gamma_3)z \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Ejemplo 4.2.3 *Hallar las nuevas coordenadas de un punto $Q(6,-3,3)$, cuando los ejes coordenados son girados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales son $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$.*

Solución

A partir de las ecuaciones 4.2.4 y reemplazando los valores $x = 6$, $y = -3$, $z = 3$, y los cosenos directores, tenemos:

$$x' = (\cos\alpha_1)x + (\cos\beta_1)y + (\cos\gamma_1)z = \frac{1}{3}(6) + \frac{2}{3}(-3) + \frac{2}{3}(3) = 2 - 2 + 2$$

por tanto:

$$x' = 2$$

$$y' = (\cos\alpha_2)x + (\cos\beta_2)y + (\cos\gamma_2)z = \frac{2}{3}(6) - \frac{2}{3}(-3) + \frac{1}{3}(3) = 4 + 2 + 1$$

y así:

$$y' = 7$$

$$z' = (\cos\alpha_3)x + (\cos\beta_3)y + (\cos\gamma_3)z = \frac{2}{3}(6) + \frac{1}{3}(-3) - \frac{2}{3}(3) = 4 - 1 - 2$$

luego:

$$z' = 1$$

Y las coordenadas del nuevo punto son $(2, 7, 1)$.

Acabamos de observar que una ecuación puede simplificarse por medio de una transformación por traslación de ejes o por una rotación de ejes. Es posible simplificar, aún más, una ecuación utilizando ambas transformaciones a la vez.
Para hallar las ecuaciones de transformación partimos de las ecuaciones 4.1.1

$$x = h + x' \quad \text{e} \quad y = k + y'$$

Ahora, al rotar el sistema anterior se tiene:

$$x' = x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad y' = x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha$$

Reemplazando estas ecuaciones en las expresiones anteriores obtenemos:

$$x = h + x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha \quad y = k + x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha \tag{4.2.5}$$

Estas son las ecuaciones de transformación directa por traslación y rotación de ejes simultáneas.
Aunque estas ecuaciones se pueden emplear cuando se va a realizar simultáneamente una traslación y una rotación de ejes, en general, es más simple efectuar cada transformación en forma separada, es decir, primero una transformación y luego la otra. El orden para realizar las operaciones no importa, sin embargo, se recomienda que si la ecuación es de segundo grado y los términos x^2, y^2 y xy forman un trinomio cuadrado perfecto, se debe realizar primero la rotación y luego la traslación de ejes.

Ejemplo 4.2.4 *Simplifique la ecuación* $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$*, por transformación de coordenadas.*

Solución

Observemos que los términos de segundo grado en la ecuación no forman un trinomio cuadrado perfecto, entonces, realizamos primero la traslación de ejes y luego la rotación.
Reemplazando las ecuaciones 4.1.1 en la expresión dada se tiene:

$$(h + x')^2 - 10(h + x')(k + y') + (k + y')^2 - 10(h + x') + 2(k + y') + 13 =$$

luego,

$$\begin{aligned} &h^2 + 2hx' + (x')^2 - 10hk - 10hy' - 10kx' - 10x'y' \\ &+k^2 + 2ky' + (y')^2 - 10h - 10x' + 2k + 2y' + 13 = 0 \end{aligned}$$

Para anular los términos de primer grado tenemos:

$$2hx' - 10kx' - 10x' = 0 \quad \text{y} \quad -10hy' + 2ky' + 2y' = 0$$

Obtenemos las ecuaciones:

$$2h - 10k - 10 = 0 \quad \text{y} \quad -10h + 2k + 2 = 0$$

Solucionando las ecuaciones se obtiene:

$$h = 0 \quad \text{y} \quad k = -1$$

reemplazando en la ecuación desarrollada se tiene:

$$(x')^2 + 10x' - 10x'y' + 1 - 2y' + (y')^2 - 10x' - 2 + 2y' + 13 = 0$$

y simplificando obtenemos:

$$(x')^2 - 10x'y' + (y')^2 + 12 = 0$$

Utilizando las ecuaciones para la rotación:

$$x' = x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad y' = x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha$$

Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned}&(x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha)^2 - 10(x'' \cos\alpha - y'' \operatorname{sen}\alpha)(x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha)\\ &+(x'' \operatorname{sen}\alpha + y'' \cos\alpha)^2 + 12 = 0\end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}&(x'')^2 \cos^2\alpha - 2x''y'' \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + (y'')^2 \operatorname{sen}^2\alpha - 10(x'')^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha\\ &-10x''y'' \cos^2\alpha + 10x''y'' \operatorname{sen}^2\alpha + 10(y'')^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + (x'')^2 \operatorname{sen}^2\alpha\\ &+2x''y'' \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + (y'')^2 \cos^2\alpha + 12 = 0\end{aligned}$$

Para eliminar los términos cruzados, tenemos:

$$-2x''y'' \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha - 10x''y'' \cos^2\alpha + 10x''y'' \operatorname{sen}^2\alpha + 2x''y'' \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = 0$$

simplificando da:

$$-10x''y'' \cos^2\alpha + 10x''y'' \operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

$$-\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 0$$

$$\cos(2\alpha) = 0$$

Solucionando da el ángulo $\alpha = 45°$. Reemplazando este valor en la ecuación tenemos: $(x'')^2 \cos^2(45°) + (y'')^2 \operatorname{sen}^2(45°) - 10(x'')^2 \cos(45°) \operatorname{sen}(45°) + 10(y'')^2 \cos(45°) \operatorname{sen}(45°) + (x'')^2 \operatorname{sen}^2(45°) + (y'')^2 \cos^2(45°) + 12 = 0$

luego:

$$\tfrac{1}{2}(x'')^2 + \tfrac{1}{2}(y'')^2 - 5(x'')^2 + 5(y'')^2 + \tfrac{1}{2}(x'')^2 + \tfrac{1}{2}(y'')^2 + 12 = 0$$

y simplificando se obtiene:

$$6(y'')^2 - 4(x'')^2 + 12 = 0$$

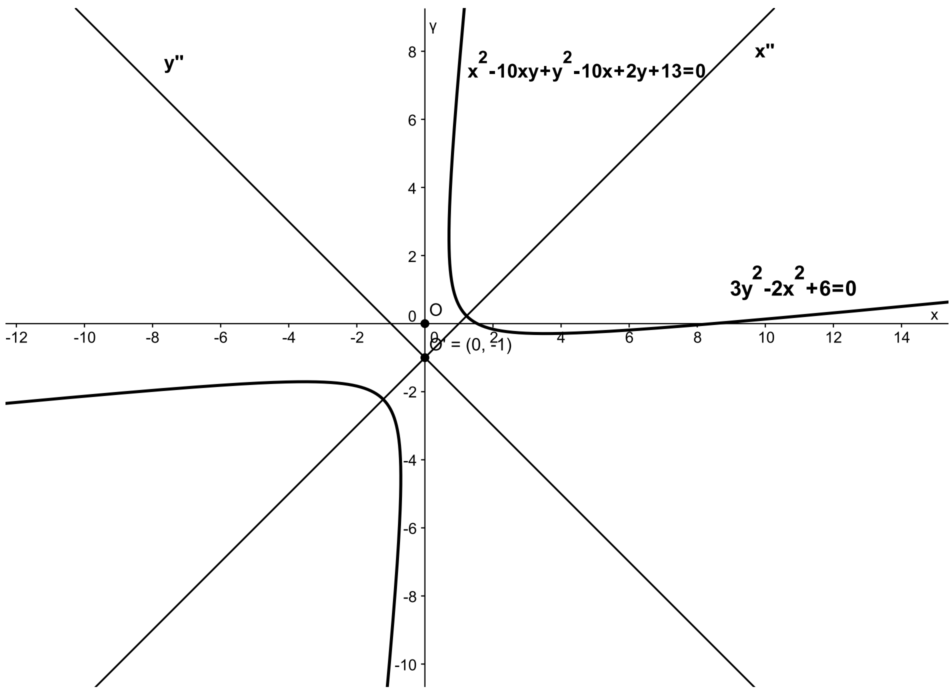


Figura 4.10: Transformación de la ecuación $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$

Ejercicios Sección 4.2.1

1. Calcule los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ tales que θ defina una rotación de ejes que elimine el término en $x'y'$ de cada ecuación.

a) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

b) $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x + 8y - 32 = 0$

c) $3xy - \sqrt{3}y^2 + 7x - 4y + 10 = 0$

d) $x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 3y + 12 = 0$

2. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. Demostrar que la forma de esta ecuación no se altera cuando se refiere a ejes coordenados que han girado cualquier ángulo θ.

3. Dada la ecuación cuadrática $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Demuestre que $4AC-B^2$ es invariante bajo rotación de ejes.

4. Emplee una rotación de ejes para eliminar el término $x'y'$. Trace un esquema de la gráfica y muestre tanto los ejes x y y como los ejes x' y y'.

a) $3x^2+2xy+3y^2=16$

b) $x^2-3xy+y^2=5$

c) $3x^2+4\sqrt{3}xy-y^2=15$

Ejercicios Capítulo 4

1. Transforme cada ecuación trasladando los ejes coordenados al origen indicado.

a) $x - 4y^2 + 16y - 7 = 0$; $(-3, 4)$

b) $x^2 - y^2 - 6x + 10y - 20 = 0$; $(3, 5)$

c) $x^2 + 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$; $(3, 2)$

d) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 4 = 0$; $(4, -5)$

e) $4x^2 - y^2 - 12x - 6y + 24 = 0$; $(\frac{3}{2}, -3)$

f) $4x^2 - y^2 - 8x - 10y - 25 = 0$; $(1, -5)$

g) $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0$; $(-2, -1)$

h) $xy - 3x + 4y - 13 = 0$; $(-4, 3)$

2. Transforme la ecuación dada haciendo una traslación de ejes, encontrando las coordenadas del nuevo origen.

a) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 36 = 0$

b) $2x^2 + y^2 + 8x - 8y - 48 = 0$

c) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$

d) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 45 = 0$

e) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 7 = 0$

f) $4y^2 - 3x^2 + 8y - 12x - 16 = 0$

g) $2x^2 + 5y^2 - 28x + 20y + 108 = 0$

h) $30xy + 24x - 25y - 80 = 0$

i) $2x^2 + 3z^2 + 16x - 6z + 29 = 0$

j) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6x - 8y + 8z + 9 = 0$

k) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 18x + 16y = 11$

3. Transforme la ecuación dada rotando los ejes coordenados el ángulo dado.

a) $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 7 = 0$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$

b) $\sqrt{3}y^2 + 3xy - 1 = 0$; $\alpha = 60°$

c) $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$; $\alpha = 45°$

d) $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 32 = 0$; $\alpha = 45°$

e) $5x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$; $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(\frac{\sqrt{10}}{10})$

4. Transforme la ecuación dada rotando los ejes coordenados, buscando el ángulo de rotación.

a) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

b) $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x + 8y - 32 = 0$

c) $3xy - \sqrt{3}y^2 + 7x - 4y + 10 = 0$

d) $2x^2 + \sqrt{3}xy + 5y^2 + x - 3y + 8 = 0$

e) $x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 3y + 12 = 0$

5. Simplifique la ecuación dada por transformación de coordenadas.

a) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$

b) $x^2 + xy + y^2 - 6x + \frac{19}{2}y - \frac{139}{4} = 0$

c) $x^2 - \sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x - 3y - 3 = 0$

d) $3xy - 4y^2 + x - 2y + 1 = 0$

e) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

f) $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x + 8y - 32 = 0$

g) $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$

h) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0$

i) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$

j) $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48 = 0$

CAPÍTULO 5

COORDENADAS POLARES

CAPÍTULO 5
COORDENADAS POLARES

Sin desconocer la historia, la verdad es que el sistema de coordenadas que Descartes expuso en su obra *La géométrie* no era exactamente como el que usamos hoy, solo el eje horizontal era dado, mientras que el otro se escogía, no necesariamente perpendicular, según las circunstancias del problema. Además, solo consideraba las curvas dentro del primer cuadrante.
Fermat también dio los primeros pasos de la geomería analítica, y utilizó además preferentemente ejes perpendiculares. Sin embargo, una publicación posterior y una notación complicada impidieron que llegara a tener la influencia que tuvo *La géométrie* de Descartes.
En algunos casos, las ecuaciones obtenidas mediante las coordenadas cartesianas llevan a expresiones muy complicadas. Por eso se buscaron otras correspondencias entre geometría y álgebra, entre puntos y números. Así, en su obra *Método de fluxiones* (1671). Newton presentó hasta ocho tipos distintos de sistemas de coordenadas. Su **séptima manera** es lo que hoy conocemos por coordenadas polares (Se cree que Newton las inventó, aunque la prioridad de la publicación se debe a Jacques Bernouilli). Mucha veces son más naturales que las coordenadas cartesianas, pues de lo que se trata es de localizar un punto mediante su distancia (el módulo) al lugar que se elija como origen de coordenadas, y su orientación (el argumento) respecto de una semirrecta que se elige como ángulo cero.[14]

El OBJETIVO de este capítulo es que el estudiante logre:

- Aprender a reconocer un sistema de referencia en coordenadas polares
- Graficar curvas en este sistema de referencia
- Identificar curvas escritas con respecto del sistema coordenado polar
- Transformar ecuaciones escritas con respecto del sistema coordenado cartesiano a ecuaciones escritas con respecto del sistema coordenado polar y viceversa

[14]http://www.epsilones.com/paginas/historias/historias-016-invencioncoordenadas.html.

A continuación desarrollaremos los conceptos básicos de coordenadas polares.

5.1 Sistema de coordenadas polares

Considérese una semirrecta, llamada *eje polar*, con punto inicial O, denominado *polo*. Sea P un punto en el plano, donde r es la distancia de O a P y θ (medido generalmente en radianes) el ángulo formado por el eje polar y la semirrecta OP. entonces, el punto P se representa por el par ordenado (r, θ), donde r y θ se conocen como *coordenadas polares* de P, donde r se denomina *radio vector* y θ, *ángulo polar* (Ver Figura 5.1).

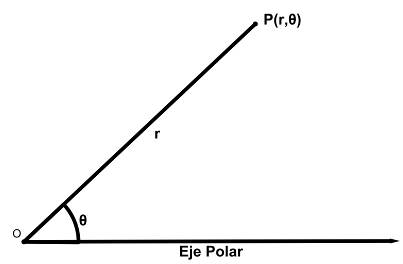


Figura 5.1: Coordenadas polares de un punto

Por lo general,el eje polar se traza en dirección horizontal hacia la derecha, coincidiendo con el eje x positivo de coordenadas cartesianas y el ángulo, teniendo en cuenta la convención que es positivo, si la medición se hace en sentido contrario a las manecillas del reloj, y es negativo, si se hace en sentido horario. Si $r > 0$, el punto $P(r, \theta)$ está en el mismo cuadrante de θ y si $r < 0$, el punto $P(r, \theta)$ está en el cuadrante opuesto de θ respecto al polo (Ver Figura 5.2).

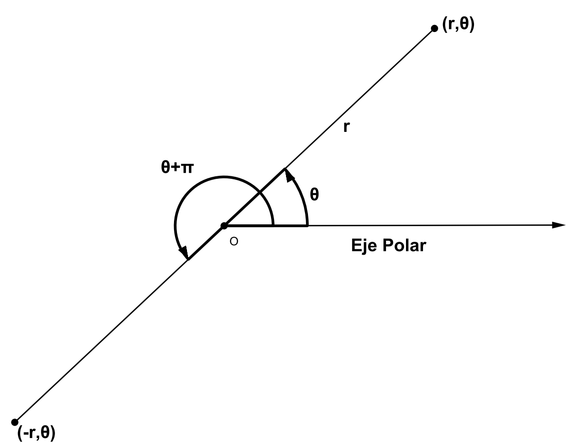


Figura 5.2: Coordenadas polares de un punto con $r < 0$

Observe que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.

Para facilitar el trazado de puntos en el sistema coordenado polar, se utiliza el plano polar, el cual, consiste en una serie de circunferencias concéntricas y rectas concurrentes. Todas las circunferencias tienen centro en el polo, y sus radios, son múltiplos del radio más pequeño tomado como unidad de medida. Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo (Ver Figura 5.3).

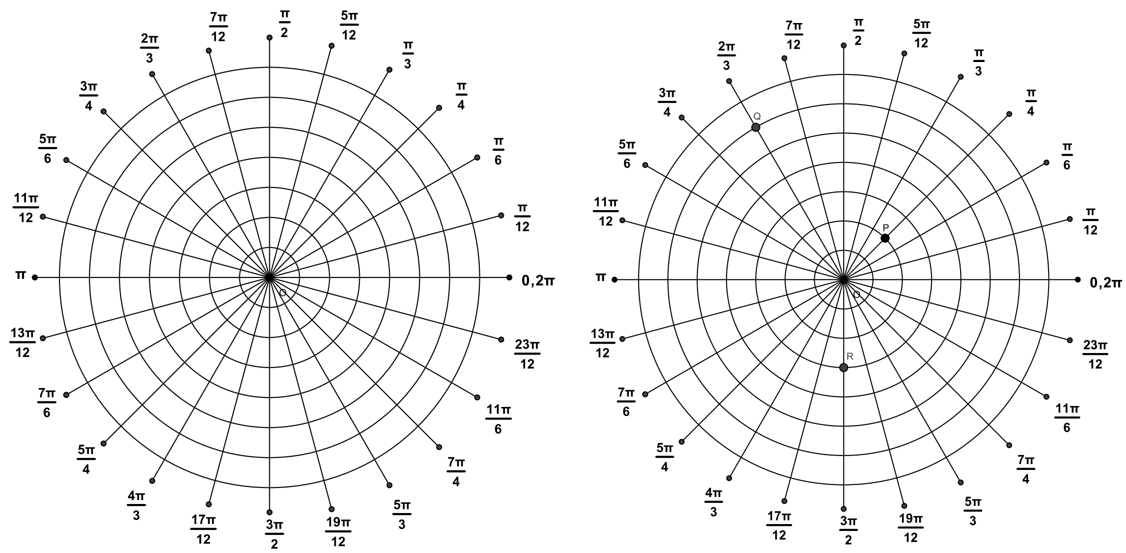


Figura 5.3: Plano Polar

En la Figura 5.3 derecha, se muestra la ubicación de los puntos $P(2, \frac{\pi}{4})$, $Q(6, \frac{2\pi}{3})$ y $R(-3, \frac{\pi}{2})$ en el plano polar.

Ejercicios Sección 5.1.1

1. Ubicar cada uno de los puntos dados en el plano polar.

a) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

b) $(-1, \pi)$

c) $(3, \frac{3\pi}{4})$

d) $(-2, \frac{7\pi}{6})$

e) $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{4})$

f) $(-1, \frac{7\pi}{3})$

2. Ubicar los puntos dados en un plano polar.

a) $(2, 45°)$

b) $(-1, 60°)$

c) $(3, 135°)$

d) $(-2, 240°)$

e) $(\frac{3}{2}, 330°)$

f) $(-1, 225°)$

5.2 Transformaciones a coordenadas polares

Realizar transformaciones de coordenadas cartesianas a coordenadas polares permite algunas ventajas, específicamente, en la representación de ciertas curvas y problemas relativos a lugares geométricos.

Para hacer transformaciones de coordenadas cartesianas a polares y viceversa, se hace coincidir el polo y el eje polar del sistema polar con el origen y el eje x positivo del sistema cartesiano.

Suponga un punto P de coordenadas cartesianas $P(x, y)$ y coordenadas polares (r, θ).

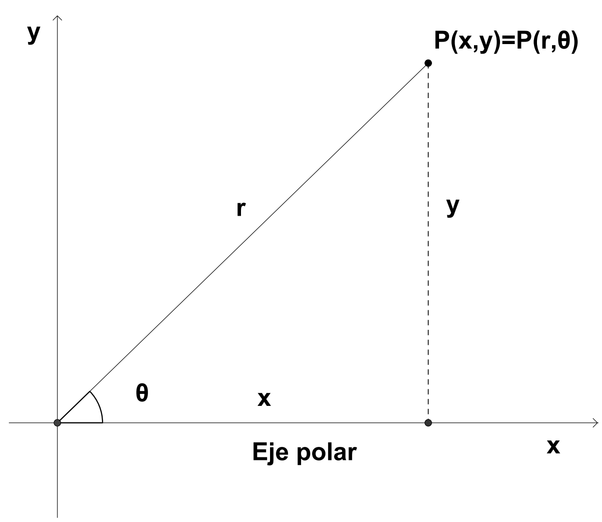


Figura 5.4: Relación entre coordenadas cartesianas y polares

De la Figura 5.4 se obtienen las siguientes relaciones:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

luego:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{5.2.1}$$

además, se tiene que:

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\tfrac{y}{x}\right) \tag{5.2.2}$$

Ejemplo 5.2.1 *Transforme la ecuación $2x - y = 0$ a coordenadas polares.*

Solución

Usando las ecuaciones 5.2.1 tenemos:

$$2x - y = 0$$

sustituyendo x y y

$$2(r\cos\theta) - (r\,\text{sen}\,\theta) = 0$$

luego,

$$\tan\theta - 2 = 0$$

$$\theta = \tan^{-1} 2$$

La gráfica de la ecuación polar se muestra en la Figura 5.5

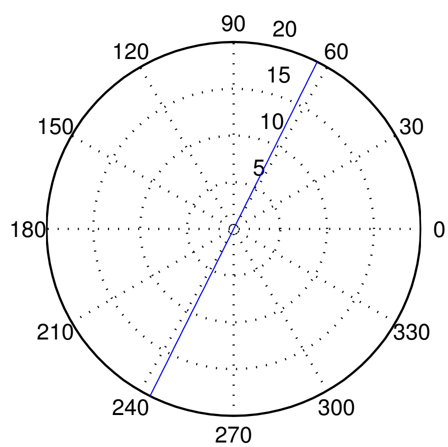


Figura 5.5: Gráfica de $\theta = \tan^{-1} 2$

Ejemplo 5.2.2 *Transforme la ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$ a coordenadas polares.*

Solución

Usando las ecuaciones 5.2.1 tenemos:

$$2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$$
$$2(r\cos\theta)^2 + 2(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + 2(r\cos\theta) - 6(r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 3 = 0$$
$$2r^2\cos^2\theta + 2r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + 2r\cos\theta - 6r\,\mathrm{sen}\,\theta + 3 = 0$$

Simplificando, obtenemos:

$$2r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) + 2r(\cos\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta) + 3 = 0$$

$$2r^2 + 2r(\cos\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta) + 3 = 0$$

Ejemplo 5.2.3 *Transforme la ecuación $r = \frac{5}{\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta}$ a coordenadas cartesianas.*

Solución

Transformando la ecuación dada tenemos:

$$r(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta) = 5$$

Se sabe que:

$$cos\theta = \tfrac{x}{r} \qquad sen\theta = \tfrac{y}{r}$$

reemplazando en la ecuación se tiene que:

$$r(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}) = 5$$

luego, simplificando r obtenemos:

$$x + y = 5$$

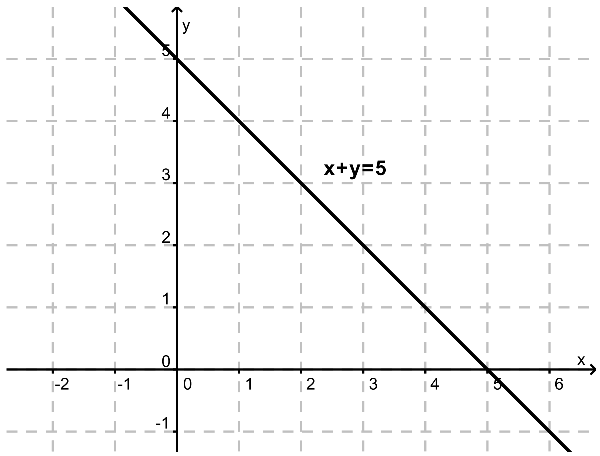


Figura 5.6: Gráfica de $x + y = 5$

Ejercicios Sección 5.2.1

1. Transformar del sistema cartesiano al sistema polar cada punto dado.

a) $(-3, 3\sqrt{3})$

b) $(-5, -5)$

c) $(-\sqrt{3}, 1)$

d) $(-3, 0)$

2. Transformar del sistema polar al sistema cartesiano los puntos dados.

a) $(2, 45°)$

b) $\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$

c) $(-2, 330°)$

d) $(3, \frac{5\pi}{6})$

3. Transforme la ecuación cartesiana dada a una ecuación polar.

a) $9x^2 - 4y^2 = 36$

b) $x + 3y = 2$

c) $x^2 + y^2 + xy = 5$

d) $x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi - p = 0$

4. Transforme la ecuación polar dada a una ecuación cartesiana.

a) $r = 8\cos\theta$

b) $r = \dfrac{4}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

c) $r = \dfrac{2}{5 - \cos\theta}$

d) $r^2 = 4\cos 2\theta$

5.3 Trazado de curvas en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación polar de la forma $r = f(\theta)$ ó de la forma $f(r,\theta) = 0$, es el conjunto de todos los puntos P que tienen por lo menos una representación polar (r,θ) que satisface la ecuación polar.
Para graficar una ecuación polar tendremos en cuenta lo siguiente:

1. Analizar las simetrías de la curva.

a) La curva es simétrica, respecto al eje polar, si al reemplazar θ por $-\theta$ o θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$ la ecuación polar no se altera o se transforma en una ecuación equivalente.

b) La curva es simétrica, respecto al eje $\frac{\pi}{2}$, si al sustituir θ por $\pi - \theta$ o θ por $-\theta$ y r por $-r$, la ecuación polar no se altera o se transforma en una ecuación equivalente.

c) La curva es simétrica, respecto al polo, si al reemplazar θ por $\pi + \theta$ o r por $-r$, la ecuación polar no se altera o se transforma en una ecuación equivalente.

2. Hallar los interceptos de la curva con el eje polar y el eje $\frac{\pi}{2}$.

a) Con el eje polar se remplaza θ por $n\pi$ con n entero

b) Con el eje $\frac{\pi}{2}$ se reemplaza θ por $\frac{n\pi}{2}$ con n entero

3. Verificar si la curva pasa por el polo, hallando θ con $r = 0$

4. Verificar la extensión del lugar geométrico

   Para determinar la extensión del lugar geométrico, se despeja r en función de θ $(r = f(\theta))$. Si r es finito para todos los valores de θ, la curva es cerrada, en caso contrario, si r se vuelve infinita para ciertos valores de θ, la curva es abierta.

5. Realizar una tabla de valores adecuado para el trazado de la curva.

Ejemplo 5.3.1 *Trazar la gráfica de* $r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$.

Solución Analicemos cada una de las características de la curva.

1. Simetrías

a) Con el eje polar

Reemplacemos θ por $-\theta$

$$r = 2 + 2\operatorname{sen}(-\theta)$$
$$r = 2 - 2\operatorname{sen}\theta$$

Observemos que la ecuación varía.

Reemplacemos θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$

$$-r = 2 + 2\operatorname{sen}(\pi - \theta)$$
$$-r = 2 + 2(\operatorname{sen}\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\pi)$$
$$-r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$$
$$r = -(2 + 2\operatorname{sen}\theta)$$

Como con esta sustitución también se llega a una ecuación diferente, por lo tanto no es simétrica respecto al eje polar

b) Con el eje $\frac{\pi}{2}$

Reemplacemos θ por $\pi - \theta$

$$r = 2 + 2\operatorname{sen}(\pi - \theta)$$
$$r = 2 + 2(\operatorname{sen}\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\pi)$$
$$r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$$

Por tanto la curva es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

c) Con el polo.

Reemplacemos a θ por $\pi + \theta$

$$r = 2 + 2\operatorname{sen}(\pi + \theta)$$
$$r = 2 + 2(\operatorname{sen}\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\pi)$$
$$r = 2 + 2\operatorname{sen}(-\theta)$$

$$r = 2 - 2\operatorname{sen}\theta$$

Reemplacemos a r por $-r$.

$$-r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$$
$$r = -(2 + 2\operatorname{sen}\theta)$$

Por tanto no es simétrica respecto al polo

2. Interceptos de la curva

a) Con el eje polar remplazamos θ por $n\pi$ con n entero.

$$r = 2 + 2\operatorname{sen}0 = 2$$
$$r = 2 + 2\operatorname{sen}\pi = 0$$
$$r = 2 + 2\operatorname{sen}2\pi = 2$$

b) Con el eje $\frac{\pi}{2}$ reemplazamos θ por $\frac{n\pi}{2}$ con n entero impar.

$$r = 2 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 4$$
$$r = 2 + 2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = 0$$

3. Verifiquemos si la curva pasa por el polo.

$$r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$$
$$0 = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta = -1$$
$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

4. Verificar la extensión del lugar geométrico Como $\operatorname{sen}\theta$ nunca es mayor a 1 para cualquier valor de θ, la ecuación $r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$ es finita para todos los valores de θ, por lo tanto, es una curva cerrada.

5. Realicemos una tabla de valores para el trazado de la curva:

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$
r	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$

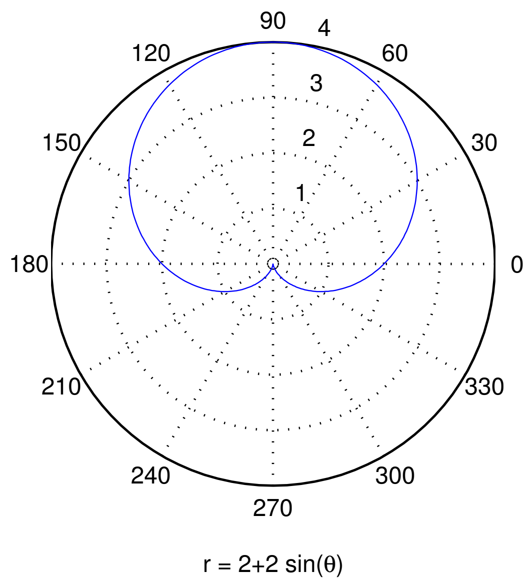


Figura 5.7: Cardiode $r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta$

Ejemplo 5.3.2 *Trazar la gráfica de* $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

Solución

Analicemos cada una de las características de la curva:

1. Simetrías.

a) Con el eje polar

Reemplacemos θ por $-\theta$

$$r = \operatorname{sen} 2(-\theta)$$
$$r = -\operatorname{sen} 2\theta$$

observemos que no se obtiene la misma ecuación.

Reemplacemos θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$

$$-r = \operatorname{sen} 2(\pi - \theta) = \operatorname{sen}(2\pi - 2\theta)$$
$$-r = (\operatorname{sen} 2\pi \cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\pi)$$
$$-r = -\operatorname{sen} 2\theta$$
$$r = \operatorname{sen} 2\theta$$

Se llega a la misma ecuación, por lo tanto es simétrica respecto al eje polar.

b) Con el eje $\frac{\pi}{2}$.

Reemplacemos θ por $\pi - \theta$

$$r = \operatorname{sen} 2(\pi - \theta)$$
$$r = \operatorname{sen}(2\pi - 2\theta)$$
$$r = \operatorname{sen} 2\pi \cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\pi)$$
$$r = -\operatorname{sen} 2\theta$$

No se llega a la misma ecuación.

Reemplacemos θ por $-\theta$ y r por $-r$.

$$-r = \operatorname{sen} 2(-\theta)$$
$$-r = -\operatorname{sen} 2\theta$$
$$r = \operatorname{sen} 2\theta$$

Obtenemos la misma ecuación, por tanto la curva es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$

c) Con el polo.

Reemplacemos a θ por $\pi + \theta$

$$r = \operatorname{sen} 2(\pi + \theta)$$
$$r = (\operatorname{sen} 2\pi \cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\pi)$$
$$r = \operatorname{sen} 2\theta$$

Llegamos a la misma ecuación, por tanto es simétrica respecto al polo.

2. Interceptos de la curva.

a) Con el eje polar reemplazamos θ por $n\pi$ con n entero

$$r = \operatorname{sen} 2(0) = 0$$
$$r = \operatorname{sen}(\pi) = 0$$
$$r = \operatorname{sen}(2\pi) = 0$$

b) Con el eje $\frac{\pi}{2}$ reemplazamos θ por $\frac{n\pi}{2}$ con n entero impar, esto es:

$$r = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$r = \operatorname{sen} 2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

3. Verifiquemos si la curva pasa por el polo.

$$r = \operatorname{sen} 2\theta$$

$$0 = \operatorname{sen} 2\theta$$
$$2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0$$
$$\operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0$$

$$\operatorname{sen} \theta = 0 \text{ ó } \cos \theta = 0, \quad \theta \epsilon \{0, \pi, 2\pi, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\}$$

4. Verificar la extensión del lugar geométrico.

   Como $\operatorname{sen} 2\theta$ nunca es mayor a 1 para cualquier valor de θ, la ecuación $r = \operatorname{sen} 2\theta$ es finita para todos los valores de θ, por lo tanto, es una curva cerrada.

5. Realicemos una tabla de valores para el trazado de la curva.

θ	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{24}$
r	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

La gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ se muestra en la Figura 5.8.

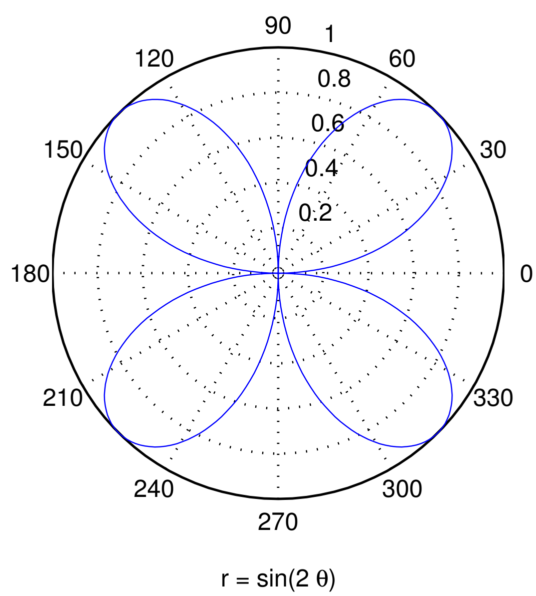


Figura 5.8: Rosa de 4 pétalos $r = \operatorname{sen} 2\theta$

Ejercicios Sección 5.3.1

1. Representar en forma gráfica la ecuación polar dada.

a) $r = 4 - 2sen\theta$

b) $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$

c) $r = 3\sec\theta$

d) $r = \tan\theta \operatorname{sen}\theta$

e) $r^2 = \cos 2\theta$

2. Obtenga todos los (r, θ), con $0 \leq \theta < 2\pi$ que satisfacen el sistema de ecuaciones polares dado y grafique ambas ecuaciones en el mismo plano polar.

a) $r = sen\theta$, $r = \cos\theta$

b) $r = sen\theta$, $r = 1 - sen\theta$

c) $r = \cos\theta$, $r = \sec\theta$

d) $r = \operatorname{sen}\theta$, $r = \csc\theta$

Ejercicios Capítulo 5

1. Ubique cada uno de los puntos en el plano polar.

a) $P(3, \frac{\pi}{3})$

b) $Q(-1, \frac{\pi}{2})$

c) $R(-4, \frac{2\pi}{3})$

d) $S(2, \frac{5\pi}{6})$

e) $T(4, \frac{7\pi}{4})$

f) $V(1, \frac{11\pi}{6})$

g) $W(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{12})$

h) $B(-2, \frac{7\pi}{6})$

i) $D(1, \frac{3\pi}{4})$

j) $Z(-1, \frac{3\pi}{2})$

2. Transforme cada una de las ecuaciones cartesianas a la forma polar.

a) $5x - 2y + 3 = 0$

b) $3x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 81$

d) $3x - y^2 = 0$

e) $2x - y = 0$

f) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

g) $xy = 4$

h) $xy + 9 = 0$

i) $25x^2 + 4y^2 = 100$

j) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

3. Transforme cada una de las ecuaciones polares a la forma cartesiana.

a) $r = 4$

b) $r = 2\cos\theta$

c) $r = 3\cos 2\theta$

d) $r = \frac{4}{4+\operatorname{sen}\theta}$

e) $r - r\cos\theta = 4$

f) $\operatorname{sen}^2\theta - 4r\cos^2\theta = 0$

g) $r^2 = 4\cos 2\theta$

h) $r = 4(1-\cos\theta)$

i) $r = \frac{2}{2-\cos\theta}$

j) $r = 2\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

4. Trazar la gráfica de cada ecuación polar dada.

a) $r = 4$

b) $r = 4\cos\theta$

c) $r = \cos 3\theta$

d) $r = 2(1+\operatorname{sen}\theta)$

e) $r = 6 - 2\operatorname{sen}\theta$

f) $r = 3\csc\theta$

g) $r^2 = \cos\theta$ (Lemniscata)

h) $r = \tan\theta$

i) $r = \frac{4}{1-\cos\theta}$

j) $r = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$ (Cisoide)

k) $r\theta = 2$ (espiral hiperbólica)

l) $r^2\theta = 9$ (Lituus)

m) $r^2 = 9\theta$ (espiral parabólica)

n) $(r^2 - 2r\cos\theta + 1)(r^2 + 2r\cos\theta + 1) = 4$ (óvalo de Cassini)

o) $r = 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$ (bifolio)

p) $r\theta = 3\operatorname{sen}\theta$ (cocleoide)

CAPÍTULO 6

CÓNICAS

CAPÍTULO 6
CÓNICAS

Las secciones cónicas son curvas planas que son el resultado de las intersecciones de un cono con un plano en diferentes inclinaciones.

Las secciones cónicas fueron introducidas por Menecmo (350 a.c) que fue uno de los maestros de Aristóteles. Durante mas de 100 años, estas curvas se llamaban a partir de la descripción trivial de la forma como habían sido descubiertas: sección (perpendicular a una generatriz) de cono acutángulo, rectángulo e hipérbola, respectivamente. Fue Apolonio de Perga (262-190 a.c) en su obra *Las cónicas* quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de cónicas variando solo la inclinación del plano que corta al cono, sino que, acuñó para posteridad los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola* para las secciones cónicas[15].

El OBJETIVO de este capítulo es que el estudiante logre:

- Aprender a reconocer las secciones cónicas dada la ecuación
- Graficar las curvas cónicas en su sistema de referencia y en el sistema de referencia trasladado
- Graficar las curvas cónicas en su sistema de referencia y en el sistema de referencia rotado
- Reconocer los elementos de las curvas cónicas
- Identificar en la ecuación de una curva cónica si hay una rotación o traslación, y recuperar la ecuación en el sistema de referencia más simple.

[15] Tomado de: **"Dios creo los números: los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia". Stephen Hawking** [5].

6.1 Secciones cónicas

La forma general de una ecuación cónica es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Esta ecuación representa geométricamente una elipse, una parábola o una hipérbola, en su defecto puede representar un punto, un par de rectas o un conjunto vacío, en este caso diremos que la cónica está **degenerada**.

Como vimos antes, los términos lineales en x e y determinan traslaciones en el eje x o en el eje y si las constantes D o E son diferentes de cero, el término en xy determina rotaciones con respecto al eje x cuando B es diferente de cero.

La expresión $B^2 - 4AC$ se llama discriminante de la ecuación y determina cuándo la ecuación representa, salvo casos degenerados, una parábola, una elipse y una hipérbola así,

Si $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación representa una elipse
Si $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación representa una parábola
Si $B^2 - 4AC > 0$, la ecuación representa una hipérbola

6.2 Definiciones y ecuaciones canónicas

6.2.1 Parábola

Una parabóla es el lugar geométrico de los puntos en el plano, tales que su distancia a una recta fija (directriz), situada en el mismo plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano (foco) que no pertenece a la recta.
Entre los elementos mas importantes de la parábola, tenemos:

- **Eje focal**: es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
- **Vértice**: es el punto, denotado con V, donde el eje focal se corta con la parábola.
- **Lado recto**: es el segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco (F), cuyos extremos son dos puntos de la parábola.
- **Distancia focal**: es la distancia que va desde el vértice (V) al foco (F) o desde el vértice V a la directriz, se denota con p.

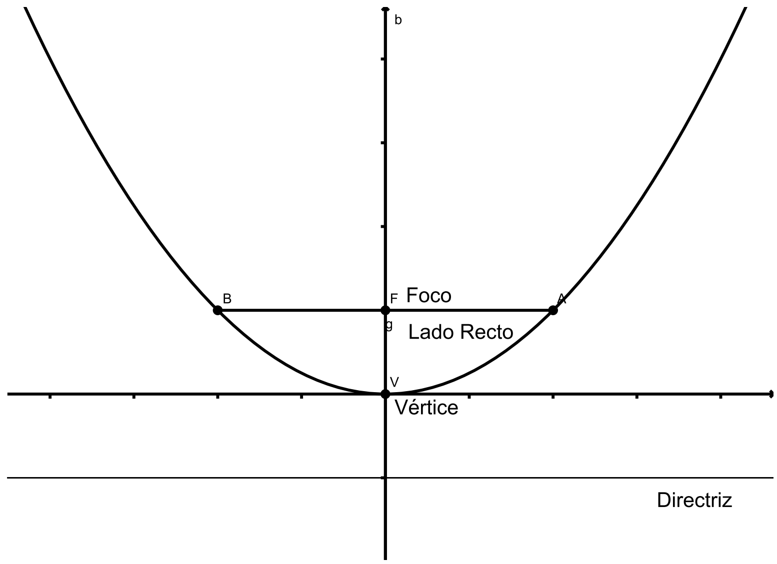


Figura 6.1: Elementos de la parábola

Ecuación canónica

Para deducir una de las ecuaciones de la parábola, tomaremos como ejemplo una parábola con eje focal coincidente con el eje y, vértice en el origen $(0,0)$ y directriz paralela al eje x (Figura 6.2).

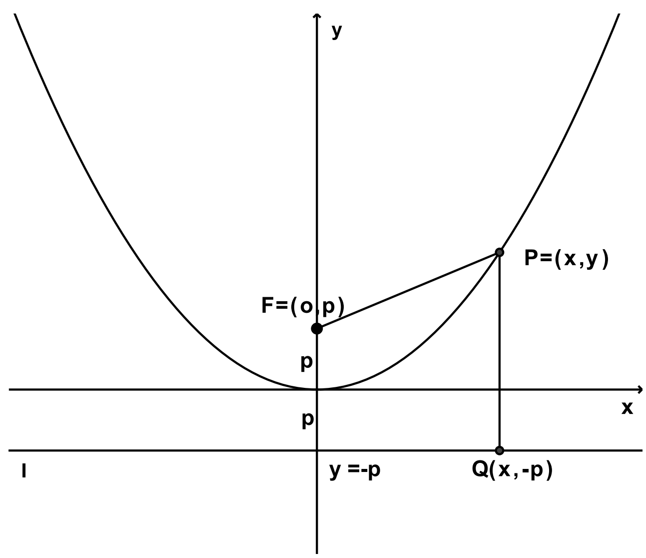


Figura 6.2: Parábola eje focal vertical, vértice en (0,0)

Ahora $P(x, y)$ es un punto sobre la parábola, F es el foco y la recta $y + p = 0$ es la directriz. Como P es un punto sobre la parábola debe satisfacer la definición, esto es:

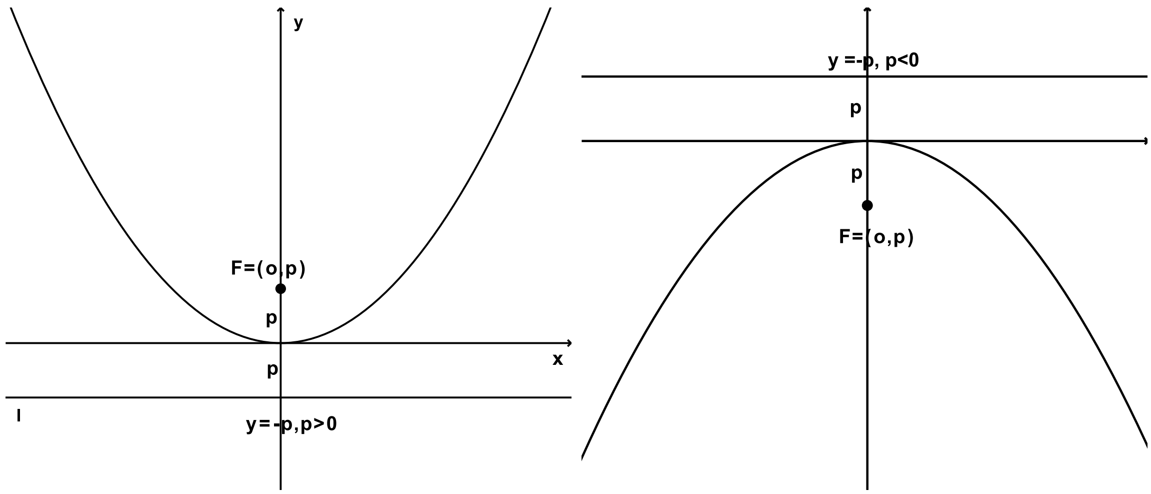


Figura 6.3: a) Parábola eje focal vertical $p > 0$ b) Parábola eje focal vertical $p < 0$

$$\begin{gathered} d(P, F) = d(P, l) \\ (d(P, F))^2 = (d(P, l))^2 \\ (x-0)^2 + (y-p)^2 = (x-x)^2 + (y+p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \end{gathered}$$

de donde simplificando, obtenemos:

$$x^2 = 4py \tag{6.2.1}$$

Podemos notar de esta ecuación que la expresión $4py$ debe ser una cantidad siempre positiva, dado que está igualada a un cuadrado, de aquí que p e y deben tener el mismo signo, asi, cuando $p > 0$ entonces el signo de y es también positivo, por tanto, la parábola abre hacia arriba (Figura 6.3 a)). Por otro lado, si $p < 0$ entonces el signo de y es negativo y en este caso la parábola abre hacia abajo (Figura 6.3 b)).

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje focal coincide con el eje x se puede demostrar, de manera similar, que la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 4px \tag{6.2.2}$$

También en este caso cabe el análisis anterior, si $p > 0$ la parábola abre hacia la derecha (Figura 6.4 b)) y si $p < 0$ la parábola abre a la izquierda (Figura 6.4 a)).

Las ecuaciones 6.2.1 y 6.2.2 al ser las ecuaciones mas simples de la parábola se reconocen como ecuaciones canónicas o formas canónicas de la parábola.

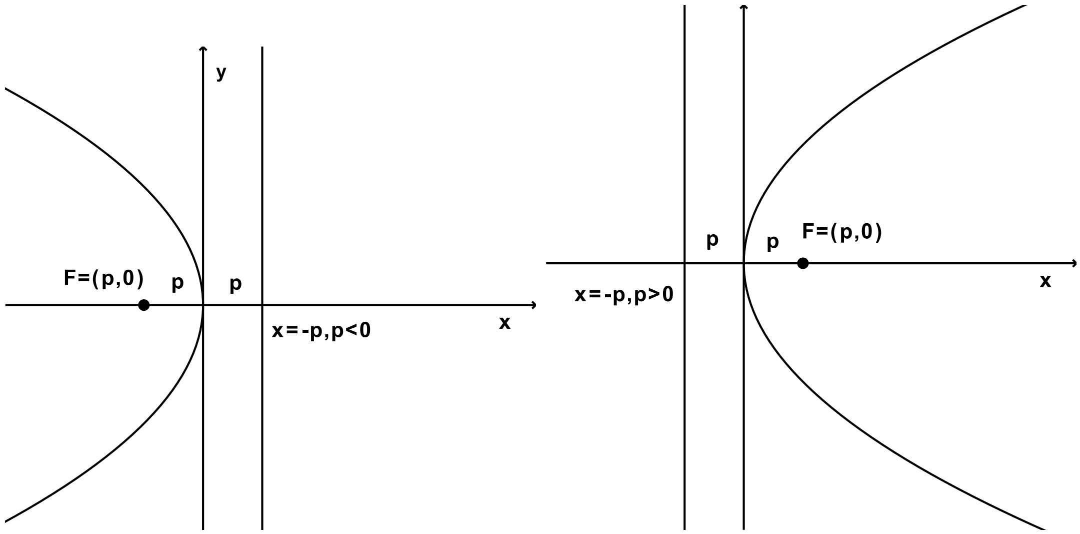


Figura 6.4: a) Eje focal horizontal $p < 0$ b) Eje focal horizontal $p > 0$

Ejemplo 6.2.1 *Hallar la ecuación de una parábola que tiene eje focal coincidente con el eje x y pasa por el punto $(4, 2)$. Hallar también las coordenadas del vértice y el foco, la ecuación del lado recto y su longitud.*

Solución

Si el eje focal de la parábola coincide con el eje x, entonces la parábola tiene ecuación de la forma

$$y^2 = 4px$$

Además se sabe que el punto $(4, 2)$ está sobre la parábola, luego debe satisfacer la ecuación, esto es

$$2^2 = 4p(4)$$

de donde despejando p obtenemos $p = 4/16 = 1/4$, así la ecuación de la parábola después de reemplazar p es $y^2 = x$.
Las coordenadas de vértice son, de acuerdo a la ecuación encontrada, $(0, 0)$.

Para hallar las coordenadas del foco sabemos que la parábola abre a la derecha, ya que $p > 0$, luego el foco está a la derecha del vértice a una distancia de p unidades, las coordenadas del foco son $(\frac{1}{4}, 0)$ (Figura 6.5).

La ecuación del lado recto, como es una recta vertical es $x = p = 1/4$. La longitud se determina calculando la distancia entre los extremos de éste, esta distancia es $|4p| = 1$.

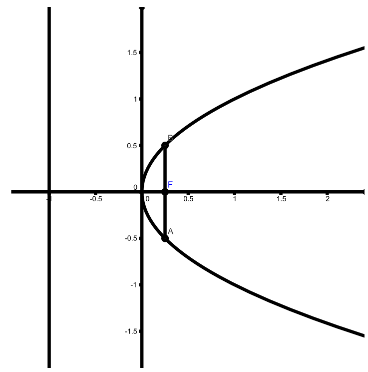


Figura 6.5: Gráfico de $y^2 = x$

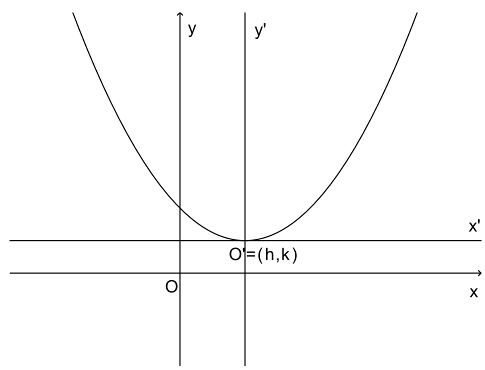


Figura 6.6: Parabóla trasladada

La ecuación de la parábola con vértice (h, k) diferente del origen y con eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados x o y, no necesariamente coincidente, puede hallarse usando una traslación de ejes con origen **O'** en el vértice (h, k). Ver Figura 6.6.

Así, la ecuación de la parábola en el sistema $x'y'$ con eje focal coincidente con el eje y' (paralelo al eje y en el sistema xy) es

$$x'^2 = 4py',$$

y como la traslación está definida por las ecuaciones $x' = x - h$ e $y' = y - k$ entonces, la ecuación de la parábola en el sistema xy con vértice (h, k) diferente del origen y eje focal paralelo a y es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{6.2.3}$$

De la misma forma podemos concluír que la ecuación de la parábola con vértice (h, k) diferente del origen con eje focal paralelo al eje x es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \tag{6.2.4}$$

Las ecuaciones 6.2.3 y 6.2.4 las llamaremos la ecuaciones básicas o canónicas de la parábola

Ejemplo 6.2.2 *Dada la ecuación*

$$y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$$

Verificar, usando el discriminante, que la ecuación representa una parábola y usar una traslación de ejes adecuada para encontrar sus elementos y hacer un gráfico.

Solución

El discriminante de la ecuación cónica viene dado por $B^2 - 4AC = 0 - 4(0)(1) = 0$, por tanto la ecuación representa una parábola.

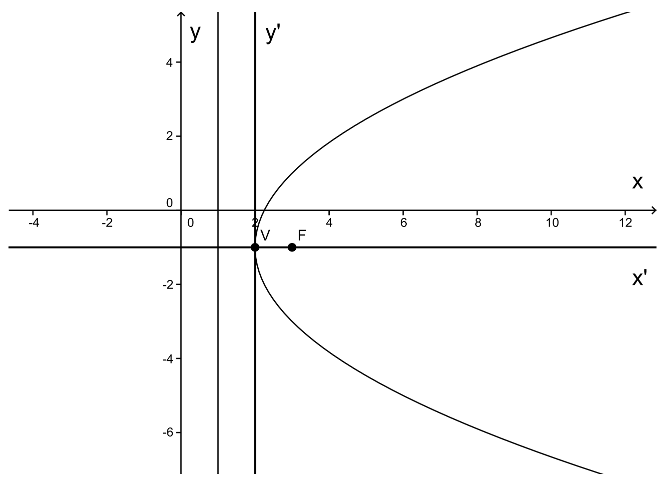


Figura 6.7: Gráfico de $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$

Para realizar una traslación de ejes conveniente (adecuada) debemos encontrar el vértice de la parábola, esto es:

$$y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$$
$$y^2 + 2y = 4x - 9$$

Completando cuadrado en "y" obtenemos:

$$y^2 + 2y + 1 = 4x - 9 + 1$$

de donde:

$$(y + 1)^2 = 4(x - 2)$$

El vértice de la parábola es $(2,-1)$, este punto lo tamaremos como el origen de coordenadas para la traslación, así la ecuación trasladada al nuevo sitema trasladado $x'y'$ es

$$y'^2 = 4x'$$

En esta ecuación se ha sustituido $y' = y + 1$ y $x' = x - 2$. Notemos que la ecuación en el sistema $x'y'$ representa una parábola horizontal que abre a la derecha. El valor de $p = 1$ y el foco es $F' = (1,0)$ en el sitema $x'y'$ y $F = (3,-1)$ en el sistema xy. La directriz es la recta $x' = 0$ en $x'y'$ y $x = 1$ en xy. La grafica de esta parábola se muestra en la Figura 6.7

Ejercicios Sección 6.2.1

1. Hallar la ecuación de la parábola, la ecuacion del eje focal y la ecuación de la directriz en cada caso.

   a) Si el vértice es $(2,3)$ y el foco es $(-1,3)$
   b) Si el vértice es $(-3,0)$ y el foco es $(1,0)$
   c) Si el vértice es $(-2,-1)$ y el foco es $(1,-1)$
   d) Si el vértice es $(-3,2)$ y el foco es $(-3,-1)$

2. Hallar la ecuación de la parábola y la ecuacion del eje focal en cada caso.

   a) Si la directriz es la recta $y + 1 = 0$ y el foco es $(-1,3)$
   b) Si la directriz es la recta $y - 3 = 0$ y el foco es $(2,1)$
   c) Si la directriz es la recta $x - 2 = 0$ y el foco es $(-1,3)$
   d) Si la directriz es la recta $x + 4 = 0$ y el foco es $(2,1)$
   e) Si el foco es el punto $(\frac{2}{3},0)$ y la ecuación de la directriz es $x + \frac{2}{3} = 0$
   f) Si el foco es el punto $(0,-\frac{4}{3})$ y la ecuación de la directriz es $y = \frac{4}{3}$

3. Para los siguientes ejercicios hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje focal. Dibujar la grafica.

   a) $y^2 = \frac{8}{3}x$
   b) $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$
   c) $y^2 + 2y - 4x = -9$
   d) $x^2 - 3x - 10 = 0$
   e) $4y^2 - 20y - 24x + 97 = 0$
   f) $y^2 + 20x - 40 = 0$
   g) $3y^2 - 4y - 6x + 8 = 0$
   h) $x^2 - 2x + 8y - 39 = 0$

4. Hallar la ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen, con eje focal el eje y, y que contiene al punto $(6,-3)$.

5. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene vétice en el punto $(2,3)$, eje focal paralelo al eje coordenado y, y contiene al punto $(4,5)$.

6. Hallar la ecuación de la parábola que contiene los puntos $(1,2)$, $(-2,1)$, $(-1,3)$ y que tiene eje focal paralelo al eje coordenado x.

7. Una parábola tiene vértice sobre la recta $7x+3y-4=0$, contiene los puntos $(3,-5)$, $(\frac{3}{2},1)$ y tiene eje focal paralelo al eje coordenado x.

8. Un bombillo está situado a 8 metros del centro del arco 18 metros de altura y 24 metros de base, Hallar la altura del bombillo.

9. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve tal que la distancia al punto fijo $(-2,3)$ es igual a la distancia a la recta $x+6=0$.

10. Una piedra se lanza horizontalmente desde la cima de un edificio de 185 metros (m) de altura con una velocidad de 15 metros por segundo (m/s). Encuentre la ditancia horizontal de caída de la piedra con respecto al pie del edificio.

6.2.2 Elipse

Una Elipse es el lugar Geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre una constante.

Entre los elementos mas importantes de la elipse tenemos:

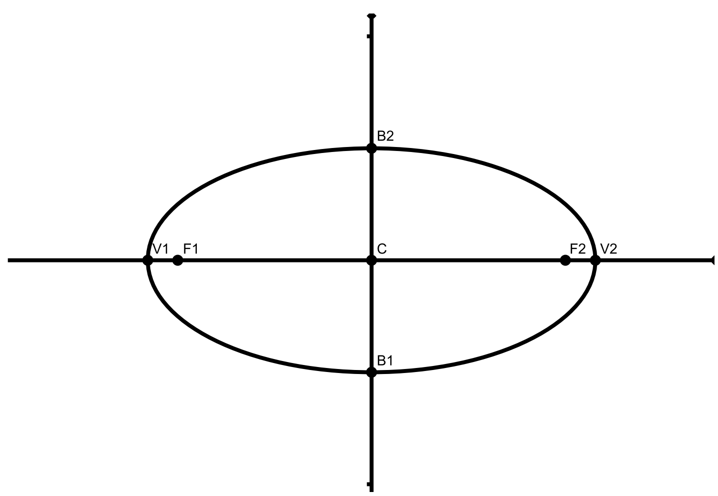


Figura 6.8: Elementos de la elipse

- **Focos**: son los puntos fijos F_1 y F_2.
- **Eje focal**: es la recta que contiene los focos.
- **Vértices**: son los puntos V_1, V_2, B_1 y B_2.
- **Eje mayor**: es el segmento $\overline{V_1V_2}$, mide $2a$.
- **Eje menor**: es el segmento $\overline{B_1B_2}$, mide $2b$.
- **Centro**: es el punto medio del segmento $\overline{V_1V_2}$.
- **Distancia Focal**: Es la distancia entre los focos, mide $2c$.

Ecuación de la elipse

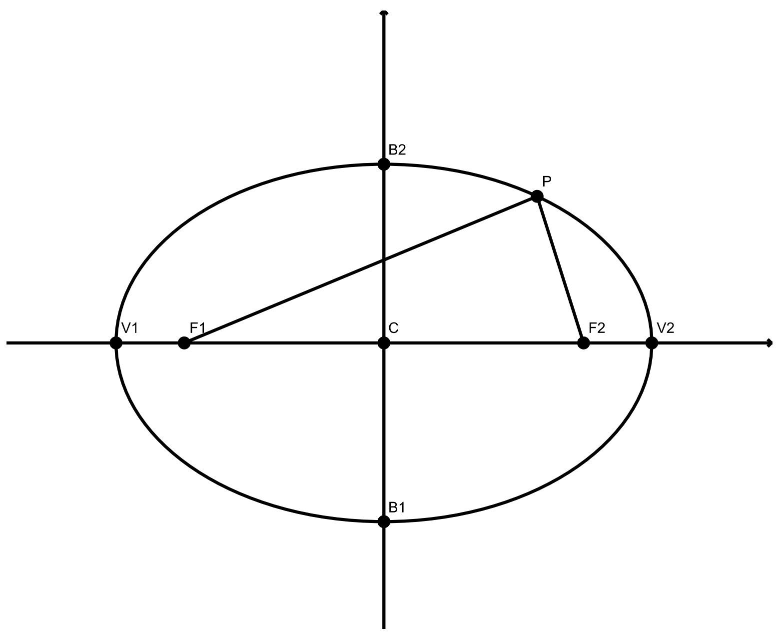


Figura 6.9: Elipse horizontal con centro en $(0,0)$

Consideremos una elipse con eje focal horizontal con centro $C = (0,0)$ como muestra la Figura 6.9. De la definición tenemos que:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

esto es

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ahora elevamos al cuadrado a ambos lados, obtenemos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$(x^2 + 2xc + c^2) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2xc + c^2) + y^2$$

Y simplificando, se tiene que:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Ahora elevando de nuevo al cuadrado y descomponiendo los binomios notables, tenemos:

$$a^2((x^2 - 2xc + c^2) + y^2) = a^4 - a^2xc + x^2c^2$$

realizando las operaciones y simplificando de nuevo:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

reorganizando los términos y factorizando:

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Si hacemos $b^2 = a^2 - c^2$, entonces podemos escribir:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividiendo ahora por a^2b^2, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.2.5}$$

De manera análoga, si tomamos una elipse con eje focal vertical y centro en el origen, obtendremos una ecuación de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{6.2.6}$$

La ecuaciones 6.2.5 y 6.2.6 representan elipses horizontales y verticales con centro en el origen respectivamente. Estas ecuaciones por ser las ecuaciones más simples de la elipse son llamadas las **ecuaciones canónicas** o **formas canónicas** de la elipse.

En ambas ecuaciones la orientación del eje focal depende de la posición de la cantidad a^2, si a está en el denominador de x^2 la elipse es de eje focal horizontal y si a^2 está en el denominador de y^2 la elipse es de eje focal vertical, en cualquier caso $a > b$. Cuando $a = b$ la elipse representa una circunferencia de radio $r = a$.

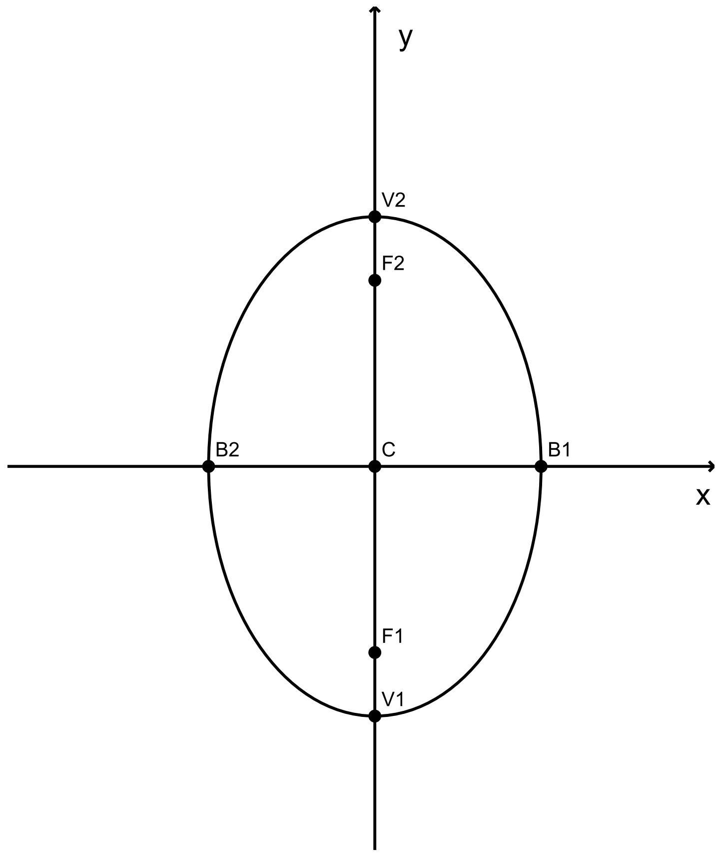


Figura 6.10: Elipse vertical con centro $(0, 0)$

Ejemplo 6.2.3 *Dada la ecuación*

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

Verifique que la ecuación determina la grafica de una elipse y halle todos sus elementos.

Solución

Primero dividimos por 100 para obtener un ecuación de la forma:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Notemos que en esta ecuación el denominador más grande lo tiene y^2, en este caso, $a = 5$ y $b = 2$, por tanto la ecuación representa una elipse con eje focal vertical y centro en $(0, 0)$. Los elementos de ésta elipse son:

- **Focos**: $F_1 = (0, -\sqrt{21})$ y $F_2 = (0, \sqrt{21})$

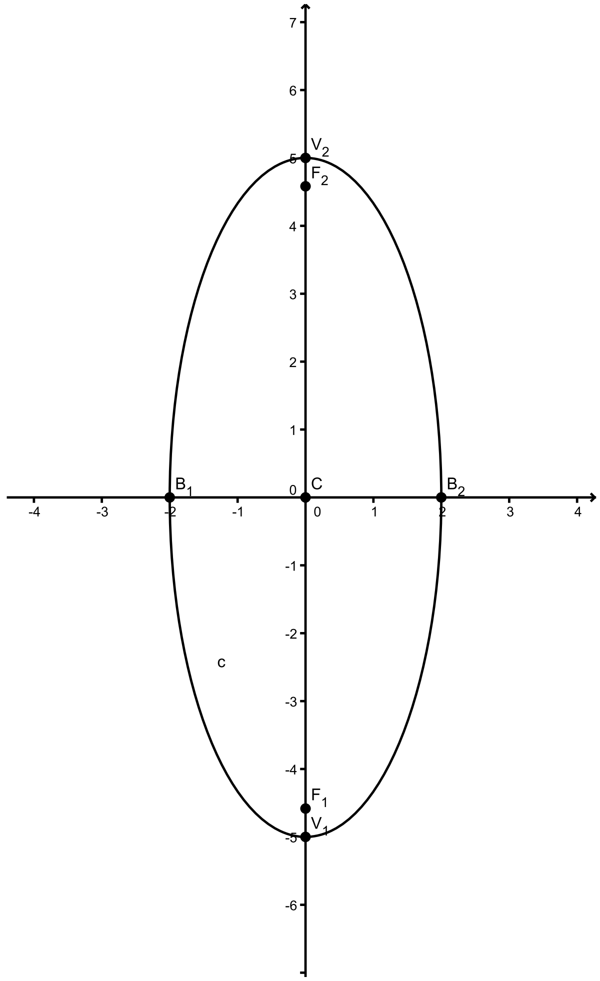


Figura 6.11: Elipse ejercicio 6.2.3

- **Eje focal**: es la recta $x = 0$
- **Vértices**: son los puntos $V_1 = (0, -5)$, $V_2(0, 5)$, $B_1 = (-3, 0)$ y $B_2 = (3, 0)$
- **Eje mayor**: es el segmento $\overline{V_1V_2}$, mide $2a = 10$
- **Eje menor**: es el segmento $\overline{B_1B_2}$, mide $2b = 8$
- **Centro**: es el punto $C = (0, 0)$
- **Distancia focal**: es la distancia entre los focos, mide $2c = 2\sqrt{21}$

La ecuación de la elipse con vértice (h, k) diferente del origen y con eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados x o y, no necesariamente coincidente, puede hallarse usando una traslación de ejes con origen O' en el vértice (h, k). Ver Figura 6.12.

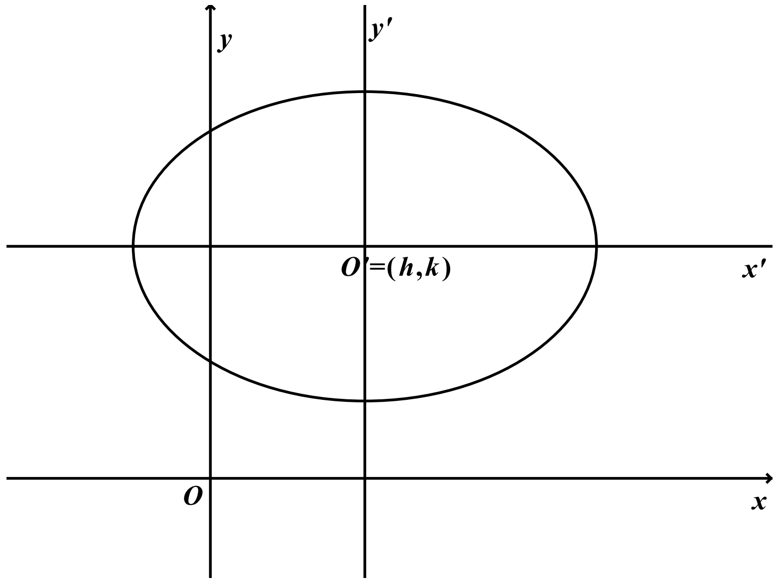


Figura 6.12: Elipse con centro (h, k) y eje focal paralelo a x (horizontal)

La ecuación de la elipse con respecto al origen $O\,'$ en $x'y'$ estaría dada, de acuerdo a los análisis anteriores, por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Realizando ahora una traslación de ejes al sistema xy con origen $O = (0, 0)$ utilizando la transformación $x' = x - h$ y $y' = y - k$ obtenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6.2.7}$$

Que se conoce como la ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje focal paralelo al eje x (horizontal).

La ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \tag{6.2.8}$$

se consigue de manera análoga a como se obtuvo la ecuación 6.2.7. Esta elipse tiene centro (h, k) y su eje focal es paralelo al eje y. Ver Figura 6.13.

Ejemplo 6.2.4 *Dada la ecuación*

$$25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$$

Determine si la gráfica de la ecuación es una elipse, si es así, halle el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje mayor. Dibújela.

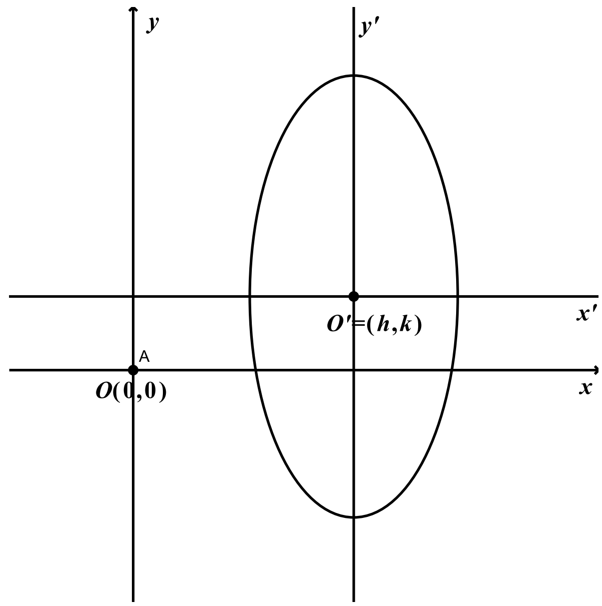


Figura 6.13: Elipse con centro (h, k) y eje focal paralelo a y (Vertical)

Solución

Calculemos el discriminante para ver que cónica representa la ecuación, esto es:

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(25)(9) = -900 < 0$$

como el discriminante es menor que cero, la ecuación representa una elipse.

Para hallar sus elementos vamos a encontrar la forma canónica de la ecuación general, veamos:

$$25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$$
$$25(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = 164$$

completando los cuadrados obtenemos:

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25 + 36$$
$$25(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 225$$

dividiendo ahora por 225 para conseguir la forma canónica:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1 \tag{6.2.9}$$

De la ecuación, notemos que el centro es $C = (h, k) = (1, -2)$, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$ y con eso $c^2 = 16$. Notemos que la elipse tiene eje mayor vertical con longitud $2a = 10$ y eje menor horizontal con longitud $2b = 6$, la distancia focal está dada por $2c = 8$.

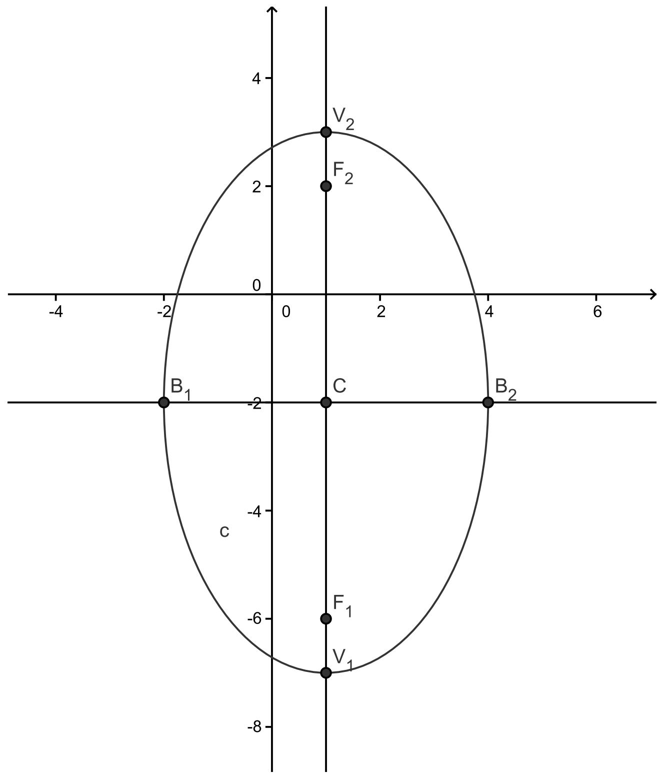


Figura 6.14: Elipse con centro en $(1,-2)$, ejemplo 6.2.4

Hallemos ahora los vértices, esto es $V_1 = (h, k-a) = (1,-7)$, $V_2 = (h, k+a) = (1, 3)$, $B_1 = (h-b, k) = (-2,-2)$ y $B_2 = (h+b, k) = (4,-2)$. Los focos se calculan de la siguiente manera $F_1 = (h, k-c) = (1,-6)$ y $F_2 = (h, k+c) = (1, 2)$ con estos puntos la gráfica de la elipse se muestra en la Figura 6.14.

Ejemplo 6.2.5 *La excentricidad de una elipse se define como el cociente $e = \frac{c}{a}$. Encuentre la ecuación de una elipse que tiene focos en los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$, y su excentricidad es igual a $2/3$.*

Solución

Como vemos en la Figura 6.15 los focos están ubicados sobre el eje x, esto sugiere que la elipse tiene eje focal horizontal, y como el centro de la elipse es el punto medio del segmento F_1F_2 entonces el centro es $(0, 0)$. Según lo anterior la ecuación canónica de la elipse tiene forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

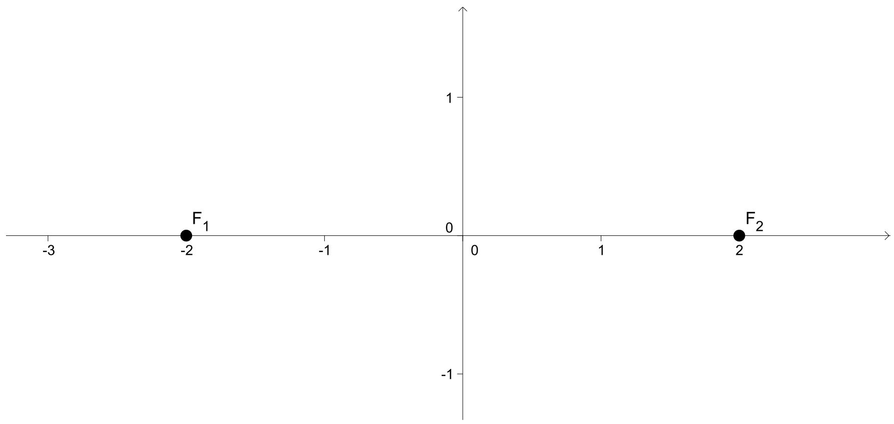


Figura 6.15: Focos ejemplo 6.15

Notemos que la distancia focal es $F_1F_2 = 2c = 4$, por tanto $c = 2$. Como la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, despejando $a = \frac{3*c}{2} = 3$ porque $c = 2$.

Ahora sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, de donde despejando b, tenemos que:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

Asi, la ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

La gráfica de la elipse se muestra en la Figura 6.16.

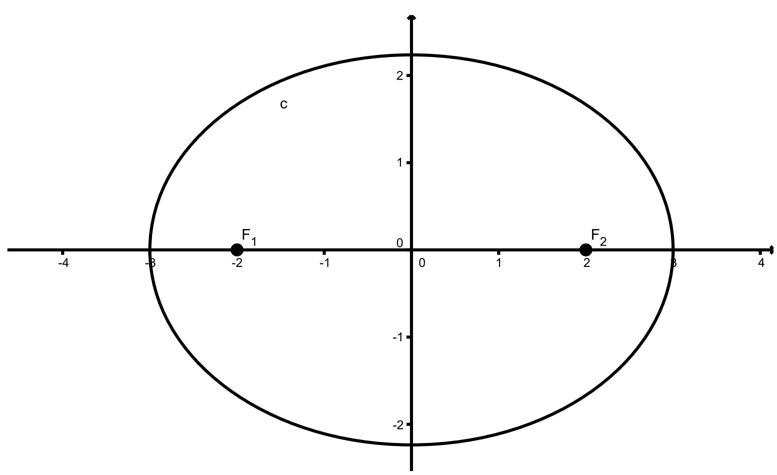


Figura 6.16: Elipse ejemplo 6.16

Ejercicios Sección 6.2.2

1. Hallar la ecuación de la elipse, la ecuación del eje mayor y la ecuación del eje menor en cada caso.

   a) Tiene centro en el punto $(0, 0)$, un foco en el punto $(0, 2)$ y un vértice en $(0, 5)$

   b) Tiene centro en $(0, 0)$, un vértice en el punto (-7,0) y uno de los extremos del eje menor es el punto $(0, 3)$

   c) Tiene centro en el punto $(-1, 2)$, un vértice en $(-1, 5)$ y una de los focos es el punto $(-1, 2 + \sqrt{5})$

   d) Los focos son $(-4, 1)$ y $(4, 1)$ y los extremos del eje mayor son los puntos $(-6, 1)$ y $(6, 1)$

   e) Contiene el punto $(8, 0)$, un foco es el punto $(1, -1)$ y tiene centro en (4,-1)

   f) Tiene centro en el origen, un foco en el punto (0,3) y el semieje mayor mide 5 unidades

2. Hallar la ecuación de la elipse en cada caso.

   a) Tiene centro en el origen, uno de sus vértices es el punto $(0, -7)$, y pasa por el punto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$

   b) Tiene focos en los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ y excentricidad $\frac{1}{2}$

   c) Tiene centro en el origen, eje mayor sobre el eje x y que contiene los puntos $(4, 3)$ y $(6, 2)$

   d) Contiene los puntos $(-6, 4)$, $(-8, 1)$, $(2, -4)$ y $(8, -3)$

3. Para los siguientes ejercicios encontrar el centro, los vértices, los focos, las ecuaciones y las longitudes del eje mayor y del eje menor.

   a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

   b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

   c) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

   d) $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$

4. La base de un auditorio es de forma elíptica y tiene 20 m de longitud y 16 m de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha claramente cerca del otro foco. ¿A qué distancia está un foco del otro?

5. La tierra se mueve en una órbita elíptica alrededor del sol, y el sol está sobre uno de los focos de la elipse. Si la mínima distancia que separa a la tierra del sol es de 147000000 kilómetros, y su mayor separación es de 150000000 kilómetros aproximadamente, ¿a qué distancia está el sol del otro foco de la elipse? (Sugerencia: la menor y mayor separación ocurren cuando la tierra está sobre el eje mayor de la elipse).

6.2.3 Hipérbola

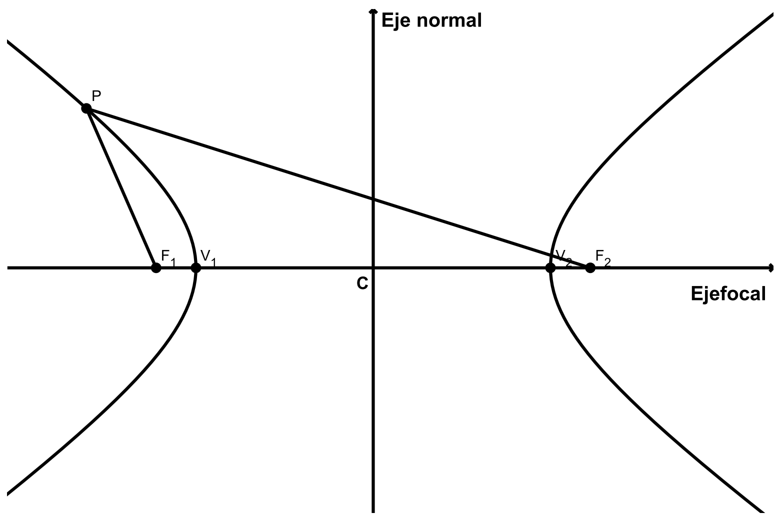


Figura 6.17: Elementos hipérbola

Una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano, llamados focos, es siempre igual a una costante positiva, menor que la distancia entre los focos.

Entre los elementos mas importantes de la hipérbola tenemos

1. **Focos**: son los puntos fijos F_1 y F_2.
2. **Distancia focal**: es la distancia entre los focos y se representa por $2c$.
3. **Eje focal**: es la recta que pasa por los focos.
4. **Vértices**: son los puntos donde el eje focal corta la hipérbola.
5. **Eje transverso**: es el segmento entre los vértices V_1 y V_2.
6. **Centro**: es el punto medio del segmento V_1 y V_2.
7. **Eje normal**: es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la hipérbola.

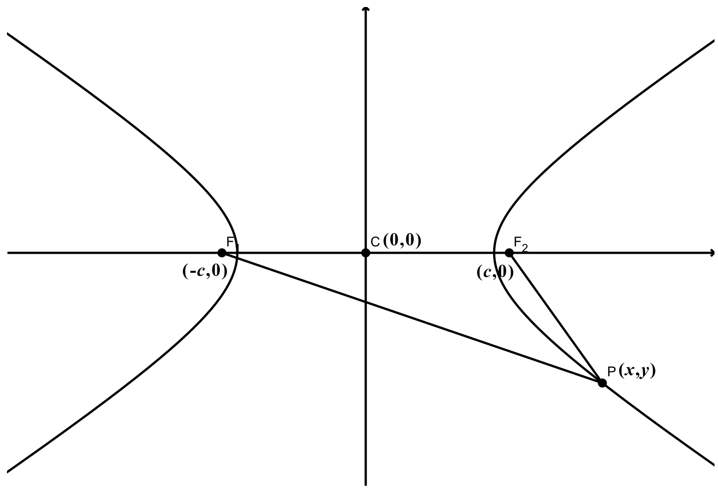


Figura 6.18: Ecuación de la hipérbola

Ecuación de la hiperbola

Consideremos una hipérbola con eje focal horizontal, centro en el origen $C = (0, 0)$ y focos en los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, $c > 0$, como muestra la Figura 6.18. Si $P = (x, y)$ es un punto sobre la hipérbola entonces de la definición de hipérbola tenemos que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \tag{6.2.10}$$

En la ecuación 6.2.10 hemos llamado $2a$ a tal distancia constante. Supongamos que $P(x, y)$ es un punto sobre la hipérbola como se ve en la Figura 6.18. Notemos que $d(P, F_1) > d(P, F_2)$, por tanto, como $2a$ es una cantidad positiva, tendremos a partir de la ecuación 6.2.10 que:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

de donde:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 2a$$

elevando al cuadrado a ambos lados y simplificando, obtenemos:

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado a ambos lados de nuevo y simplificando:

$$x^2c^2 - x^2a^2 = a^2c^2 + a^2y^2 - a^4$$

reordenando los términos y factorizando:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

En ésta ecuación hagamos $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$ y tenemos:

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Finalmente, dividiendo por a^2b^2 obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.2.11}$$

que llamaremos la forma canónica o ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(0, 0)$.

Observaciones

1. Si analizamos la otra posibilidad del valor absoluto tenemos:

   $$d(P, F_1) < d(P, F_2)$$

   Entonces, partimos de la ecuación $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$ para llegar a la misma ecuación 6.2.11. Gráficamente, esto significa que el punto $P(x, y)$ estaría en la otra rama de la hipérbola con respecto a la grafica mostrada en 6.18.

2. La ecuación 6.2.11 representa una hipérbola con eje focal horizontal. Notemos que esta característica la determina el hecho de que x^2 aparece en la ecuación formal con signo positivo cuando la expresión está igualada a uno. En este caso, también podemos notar que la cantidad positiva a^2 se decide de acuerdo con el signo de la variable que está al cuadrado cuando la expresión está igualada a uno.

3. Un análisis similar se hace cuando la hipérbola tiene eje focal vertical y centro en $C = (0, 0)$, en este caso, la definición de hipérbola lleva a la ecuación:

   $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{6.2.12}$$

   en donde, la elección de a^2 se hace considerando que la expresión positiva es y^2 cuando la ecuación 6.2.12 está igualada a uno. Ver Figura 6.2.11.

4. En el razonamiento para llegar a la ecuación de la hipérbola 6.2.11, se hizó $b^2 = c^2 - a^2$, despejando c^2 en esta expresión, obtenemos:

   $$c^2 = a^2 + b^2 \tag{6.2.13}$$

   Notemos que las tres cantidades están relacionadas por el teorema de pitágoras con c en la hipótenusa.

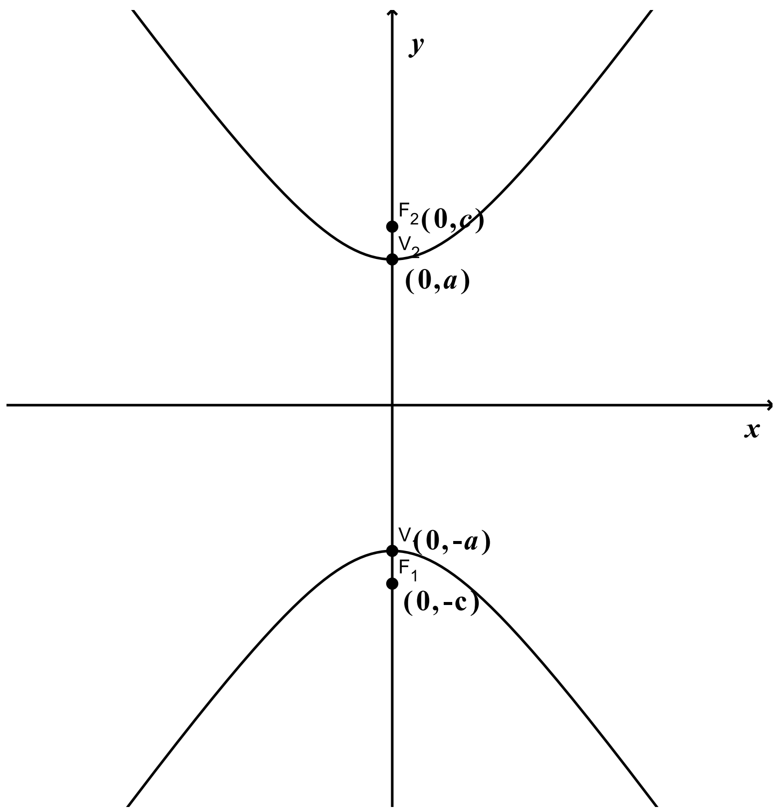


Figura 6.19: Hipérbola vertical

5. La definición de hipérbola excluye el caso en que el punto está sobre la recta determinada por los focos.

Ejemplo 6.2.6 *Encontrar los elementos y graficar la hipérbola que está representada por la ecuación* $x^2 - 4y^2 = 4$.

Solución

Primero dividimos por 4 la ecuación para obtener:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

Como la ecuación está igualada a uno y x^2 es positva, la hipérbola tiene eje focal horizontal y entonces $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$. De la ecuación 6.2.13 $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$, por tanto $c = \sqrt{5}$. Con estos datos sabemos que el centro es $C = (0, 0)$, los vértices $V_1 = (-a, 0) = (-2, 0)$ y $V_2 = (2, 0)$, los focos $F_1 = (-c, 0) = (-\sqrt{5}, 0)$ y $F_2 = (c, 0) = (\sqrt{5}, 0)$
Por otro lado, La distancia focal es $2c = 2\sqrt{5}$, el eje transverso mide $2a = 4$, la ecuación del eje normal es $x = 0$ (el eje y) y la hipérbola se muestra en la Figura 6.20.

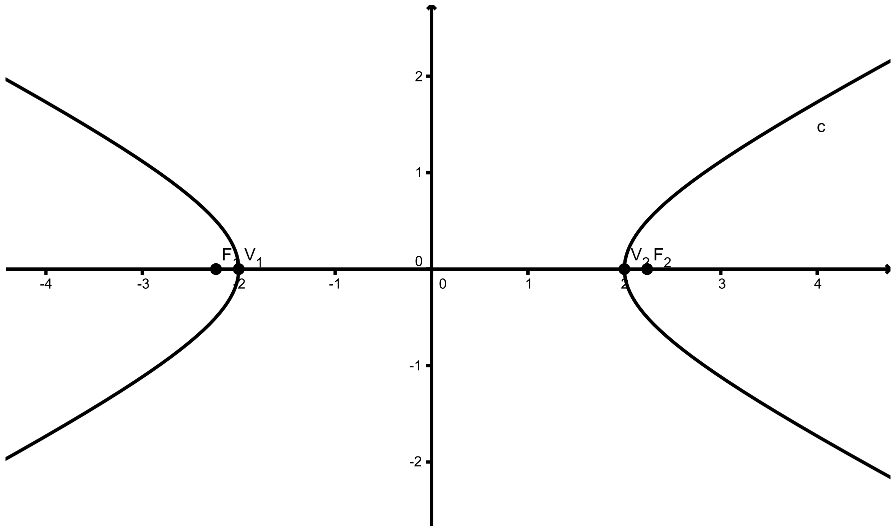


Figura 6.20: Hipérbola ejemplo 6.2.6

Asíntotas de la hipérbola

Partamos de la ecuación canónica de la hipérbola centrada en $C = (0, 0)$ escrita en la forma

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$$

despejemos en esta ecuación la variable y, esto es:

$$y^2a^2 = x^2b^2 - a^2b^2$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

entonces:

$$|y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

es decir,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad e \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{6.2.14}$$

Las ecuaciones anteriores representan la rama derecha y la rama izquierda, respectivamente, de una hipérbola con centro en $(0, 0)$ como muestra la Figura 6.21.

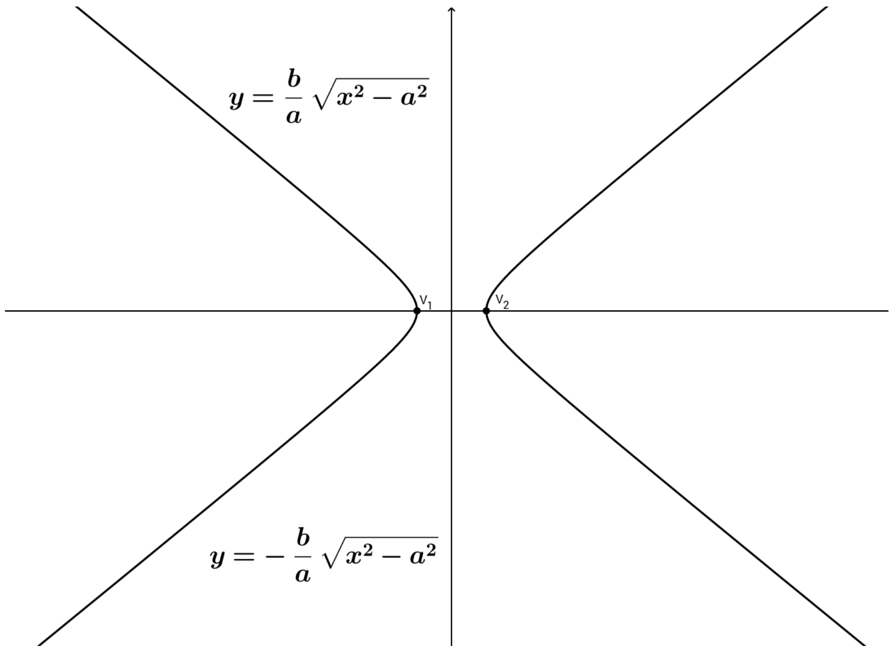


Figura 6.21: Ramas de la hipérbola $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ e $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Por otro lado, si partimos de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Notemos que es la ecuación canónica de la hipérbola, ecuación 6.21, pero igualada a cero. Despejando y obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$$

entonces:

$$|y| = \frac{b}{a}x$$

es decir,

$$y = \frac{b}{a}x \quad e \quad y = -\frac{b}{a}x \tag{6.2.15}$$

Las ecuaciones anteriores representan dos rectas que se cortan en el centro $C = (0, 0)$ de la hipérbola. La Figura 6.22 muestra estas rectas.
Para ver en que se relacionan las Figuras 6.21 y 6.22, la hipérbola y las rectas, hemos graficado en un mismo plano las dos figuras, Figura 6.23.

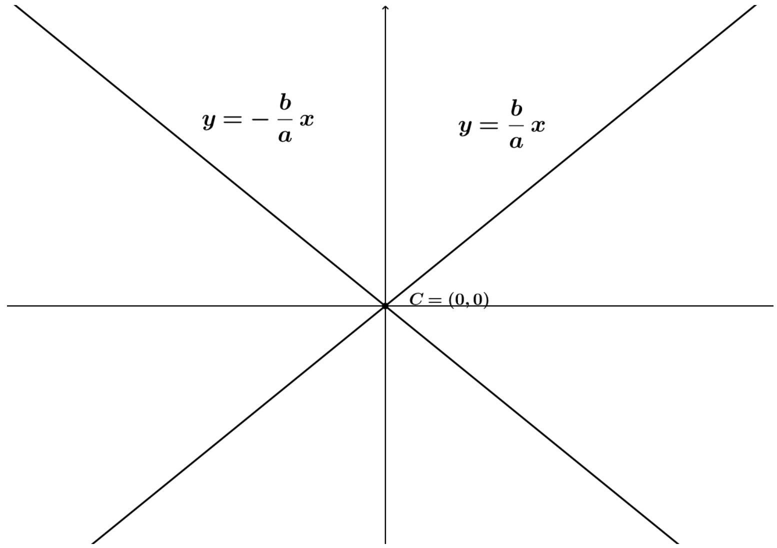


Figura 6.22: Rectas que se cortan en el centro de la hipérbola $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$

Notamos que cuando la variable x crece en valor absoluto las ramas de la hipérbola se acercan cada vez más a las graficas de las rectas. A este comportamiento de las ramas de la hipérbola con respecto a las rectas lo llamaremos asintótico.

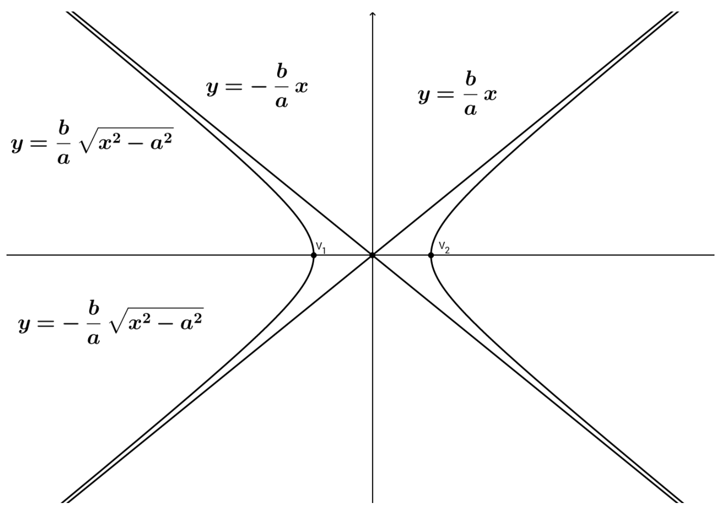


Figura 6.23: Hipérbola con sus asíntotas

Llamaremos ***asíntotas de la hipérbola*** a las rectas cuyas ramas de la hipérbola se le acercan indefinidamente a medida que la variable x crece en valor absoluto.

Una manera práctica de graficar con cierta precisión una hipérbola consiste en graficar primero las rectas asíntotas y luego con respecto a las asíntotas hacer el gráfico de la ramas de la hipérbola.

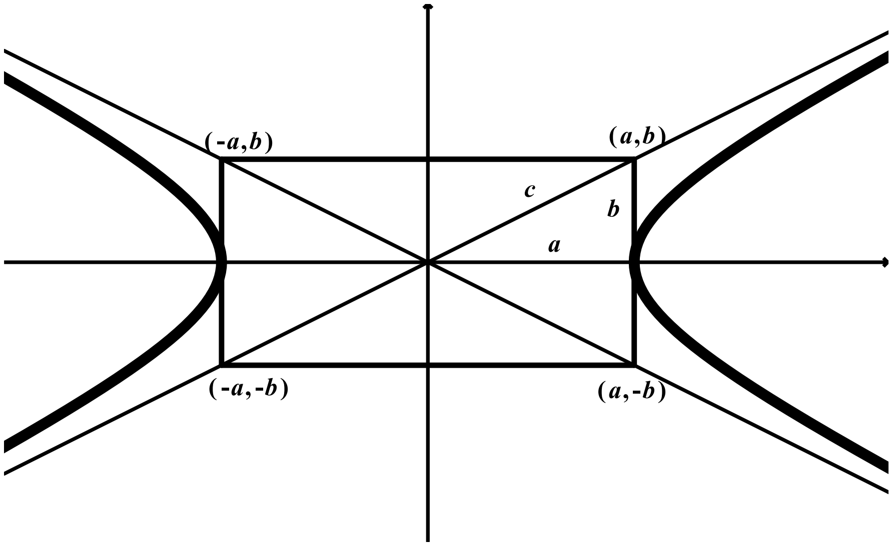


Figura 6.24: hipérbola con sus asíntotas con respecto al rectángulo

Para graficar las rectas asíntotas conviene hacer el rectángulo determinado por los parámetros a, b y c. Ver Figura 6.24. Ya habiamos dicho que los parámetros a, b y c estaban en relación pitagórica con c en la hipotenusa.

Ejemplo 6.2.7 *Dibujar las asíntotas de la hipérbola del ejemplo 6.2.6.*

Solución

Recordemos que en este ejemplo $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$ por tanto $a = 2$ y $b = 1$, con eso los vértices del rectángulo son $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$ y $(2, -1)$. Los vértices ya sabíamos, del ejemplo 6.2.6, que son $V_1 = (-2, 0)$ y $V_2 = (2, 0)$, la gráfica de la hipérbola se muestra en la Figura 6.25.

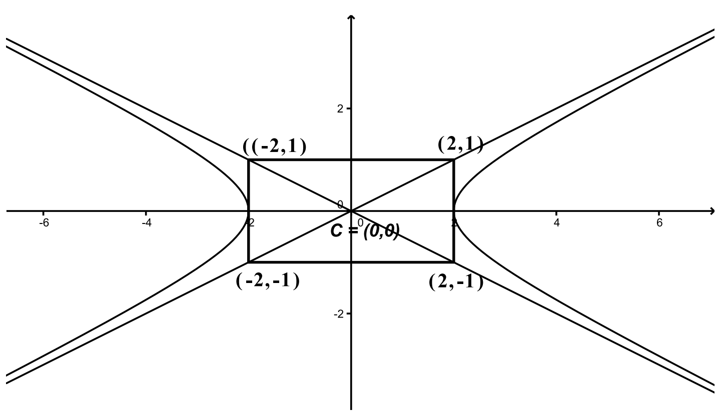


Figura 6.25: Hipérbola con sus asíntotas con respecto al rectángulo ejemplo 6.2.7

La ecuación de la hipérbola con vértice (h, k) diferente del origen y con eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados x o y, no necesariamente coincidente, puede hallarse usando una traslación de ejes con origen $O\,'$ en el vértice (h, k) Ver Figura 6.26.

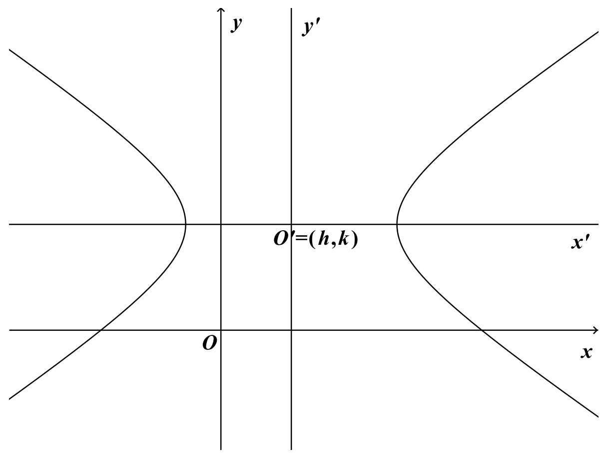


Figura 6.26: Hipérbola con centro (h, k) Eje focal paralelo a x (Horizontal)

La ecuación de la hipérbola con respecto al origen O' en $x'y'$ estaría dada, de acuerdo a los analisis anteriores, por:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Realizando ahora una traslación de ejes al sistema xy con origen $O = (0, 0)$ utilizando la transformación $x' = x - h$ y $y' = y - k$ obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6.2.16}$$

que se conoce como la ecuación canónica de la hipérbola con centro (h, k) y eje focal paralelo al eje x (horizontal).

La ecuación:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6.2.17}$$

se consigue de manera análoga a como se obtuvo la ecuación 6.26. Esta ecuación representa una hipérbola con centro (h, k) y eje focal es paralelo al eje y. Ver Figura 6.27.

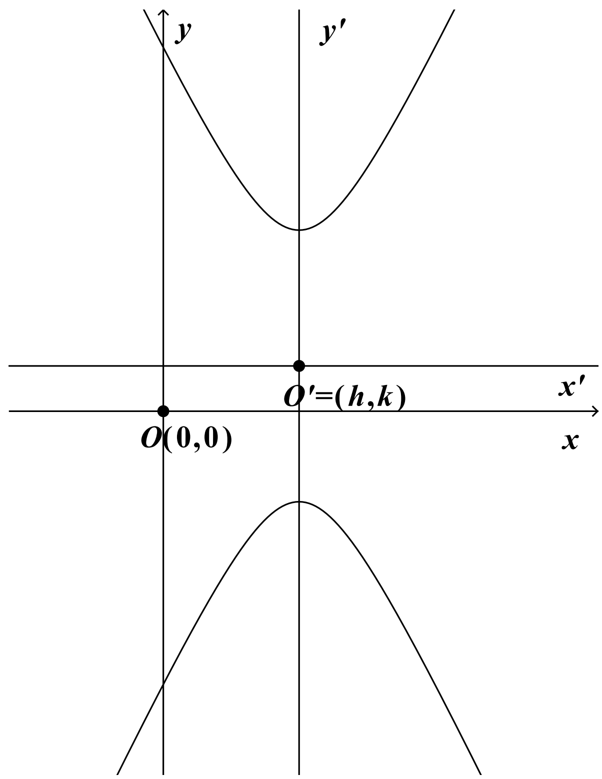


Figura 6.27: Hipérbola con centro (h, k) eje focal paralelo a y (Vertical)

Ejemplo 6.2.8 *Dada la ecuación*

$$9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$$

Demuestre utilizando el discriminante que la ecuación representa una hipérbola, después halle todos sus elementos y haga un gráfico de ésta.

Solución

El discriminante está dado por

$$B^2 - 4AC = -4(9)(-4) = 144 > 0$$

Como el discriminante es positivo la ecuación representa una hipérbola.

Para hallar los elementos de la hipérbola, primero buscamos la forma canónica. Los términos lineales en x o y indican que la hipérbola tiene centro $C = (h, k) \neq (0, 0)$

Completando cuadrados en x, en y y simplificando obtenemos que:

$$9(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 4y) = -29$$

por tanto:

$$9(x^2+6x+9)-4(y^2-4y+4)=-29+81-16$$

de donde,

$$9(x+3)^2-4(y-2)^2=36$$

Así, la ecuación canónica de la hipérbola con centro diferente de $(0,0)$ es:

$$\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{9}=1 \tag{6.2.18}$$

De la ecuación canónica, tenemos que el centro es $C=(-3,2)$, $a^2=4$ (sale de la variable positiva en este caso $(x+3)^2$), $b^2=9$, luego $a=2$, $b=3$ y $c^2=a^2+b^2=4+9=13$, por tanto, $c=\sqrt{13}$. La hipérbola tiene eje focal paralelo al eje x, entonces los vértices son $V_1=(h-a,k)=(-3-2,2)=(-5,2)$ y $V_2=(-3+2,2)=(-1,2)$, los focos son $F_1=(h-c,k)=(-3-\sqrt{13},2)$ y $F_1=(h-c,k)=(-3-\sqrt{13},2)$ y $F_2=(h+c,k)=(-3+\sqrt{13},2)$

Para graficar la hipérbola, dibujamos primero el centro C, los vértices V_1 y V_2 y, con respecto a estos puntos, el rectángulo de lados $2a=4$ y $2b=9$ con centro en C como muestra la Figura 6.28.

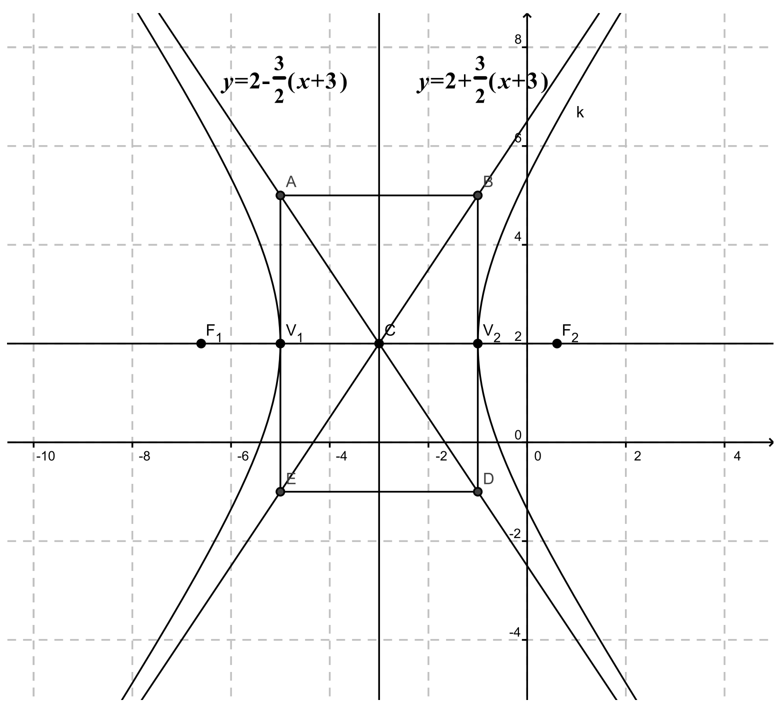


Figura 6.28: Hipérbola ejemplo 6.2.8

Después, dibujamos las rectas que contienen las diagonales del rectángulo. Estas son las asíntotas de la hipérbola. Ver Figura 6.28.

Como la gráfica de la hipérbola tiene eje focal horizontal, entonces hacemos el dibujo de la hipérbola con respecto a éste eje focal, ver Figura 6.29.

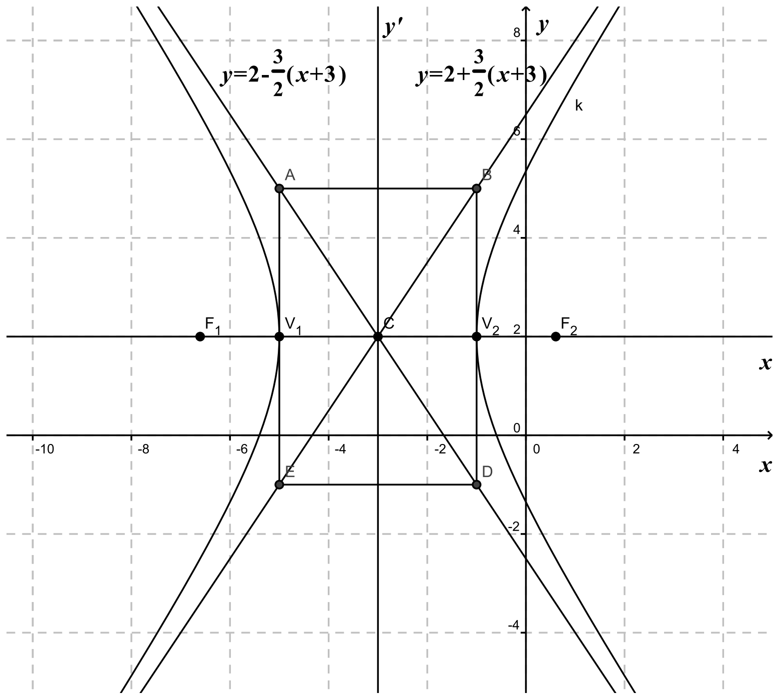


Figura 6.29: Rectángulo e hipérbola ejemplo 6.2.8

Las ecuaciones de las asintotas de la hipérbola las podemos encontrar, reemplazando en la ecuación canónica, el término constante por cero, esto es:

$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 0$$

despejando y en esta ecuación obtenemos las ecuaciones de las asíntotas:

$$y = 2 + \frac{3}{2}(x+3) = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \quad \text{y} \quad y = 2 - \frac{3}{2}(x+3) = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

Ejemplo 6.2.9 *Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos* $(3,-2)$ *y* $(7,6)$*, tiene su centro en el origen y su eje transverso coincide con el eje* x*.*

Solución

Como la hipérbola tiene eje transverso horizontal y centro en $(0,0)$, entonces tiene forma canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ahora, como los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$ están sobre la hipérbola deben satisfacer la ecuación, esto es:

$$\frac{(3)^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1 \text{ y } \frac{(7)^2}{a^2} - \frac{(6)^2}{b^2} = 1$$

múltiplicando por a^2b^2 ambas ecuaciones, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 9b^2 - 4a^2 &= a^2b^2 \\ 49b^2 - 36a^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

que tiene solución $a^2 = 4$ y $b^2 = \frac{16}{5}$. Con eso, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1$$

La gráfica de ésta hipérbola se muestra en la Figura 6.30.

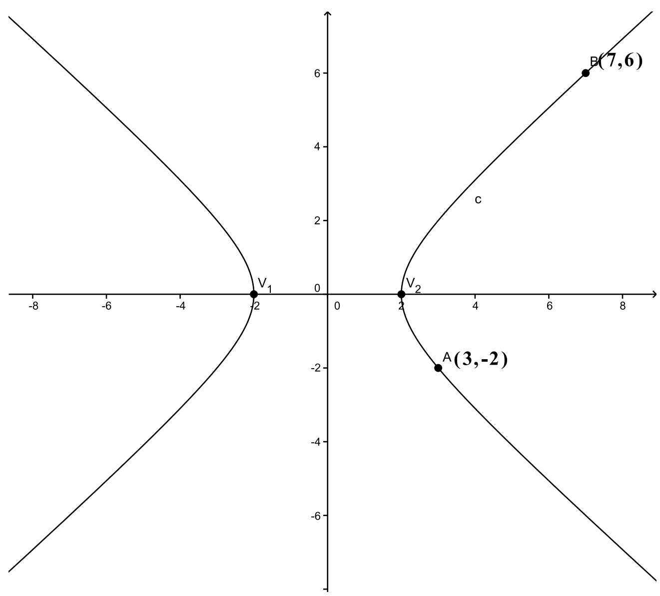


Figura 6.30: Hipérbola ejemplo 6.2.9

Ejercicios Sección 6.2.3

1. Hallar la ecuación de la hipérbola cuyos focos F_1 y F_2 y cuyos vértices V_1 y V_2 se dan. Trace una gráfica de la ecuación.

   a) $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$, $V_1(0, 4)$, $V_1(0, -4)$

   b) $F_1(\sqrt{5}, 0)$, $F_2(-\sqrt{5}, 0)$, $V_1(\sqrt{3}, 0)$, $V_1(-\sqrt{3}, 0)$

   c) $F_1(8, 2)$, $F_2(-8, 2)$, $V_1(2, 2)$, $V_1(-2, 2)$

2. Hallar la ecuación de la hipérbola a partir de los datos dados.

   a) Focos $(-7,3)$, $(-1,3)$; longitud del eje transverso $= 4$

   b) Focos $(3,1)$, $(-3,1)$; $a = 1$

   c) Vértices $(3,4)$, $(3,-2)$; excentricidad$= 2$

   d) Foco $(13,0)$, Centro $(0,0)$, asíntotas $y = \pm\frac{5}{12}x$

3. Hallar las coordenadas de los vértices, focos y ecuación de las asíntotas de las hipérbolas dadas.

   a) $3x^2 - 9y^2 - 6x + 36y - 60 = 0$

   b) $16x^2 - 16y^2 - 16x - 8y - 61 = 0$

   c) $25y^2 - 9x^2 - 150y - 90x - 225 = 0$

   d) $4y^2 - 3x^2 - 96y - 18x + 537 = 0$

4. Si k es un número cualquiera diferente de cero, demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = k$ representa una familia de hipérbolas de excentricidad igual a $\sqrt{2}$.

5. Las asíntotas de una hipérbola cuyo eje transversal es horizontal tiene pendientes $\pm m$, respectivamente, con $m > 0$. Exprese la excentricidad de la hipérbola en términos de m.

Ejercicios Capítulo 6

1. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice coincide con el origen de coordenadas y pasa por el punto $(3, 4)$, siendo su eje OX.

2. Escribe la ecuación de la parábola de eje paralelo a OY, vértice en OX y que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(-1, 12)$.

3. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $(3, 4)$ y radio 2.

4. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar el centro y el radio.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene:

   a) el centro en el punto $(2, 5)$ y el radio es igual a 7.

   b) un diámetro con extremos los puntos $(8, -2)$ y $(2, 6)$.

6. Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(2, -3)$ y es tangente al eje de abscisas.

7. Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la rectas $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, y su radio es igual a 5.

8. Calcular el centro y el radio de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la circunferencia $x^2+y^2 = 1$, y que pasa por el punto $(-3, 4)$.

10. Calcular la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ y la recta recta $3x + y - 5 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(3, 1)$ y es tangente a la recta: $3x - 4y + 5 = 0$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices: $A(0, 0)$, $B(3, 1)$, $C(5, 7)$.

13. Decir la posición relativa de la recta $y = 3 - 2x$ respecto de las circunferencias:

    a) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$

    b) $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$

    c) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$

14. Estudiar la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ con las rectas:

    a) $x + 7y - 20 = 0$

    b) $3x + 4y - 27 = 0$

    c) $x + y - 10 = 0$

15. Dada la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-12x+10y-11 = 0$, calcular las rectas tangentes a ella que son paralelas a la recta $x + y + 4 = 0$

16. Hallar la ecuación de lugar geométrico de los puntos $P(x.y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos $(4, 2)$ y $(-2, 2)$ sea igual a 8.

17. Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos: $F'(-3, 0)$ y $F(3, 0)$, y su eje mayor mide 10.

18. Hallar la ecuación de la elipse de foco $F(7, 2)$, de vértice $A(9, 2)$ y de centro $C(4, 2)$.

19. Determina la ecuación reducida de una elipse sabiendo que uno de los vértices dista 8 de un foco y 18 del otro.

20. Escribe la ecuación reducida de la elipse que pasa por el punto $(2, 1)$ y cuyo eje menor mide 4.

21. La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6, respectivamente. Calcular la ecuación reducida de dicha elipse.

22. Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta: $x + 2y - 1 = 0$ en la elipse de ecuación: $x^2 + 2y^2 = 3$.

23. Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$

24. Hallar la ecuación de una hipérbola de eje focal 8 y distancia focal 10.

25. El eje principal de una hipérbola mide 12, y la curva pasa por el punto P(8, 14). Hallar su ecuación.

26. El eje principal de una hipérbola mide 12 y la excentricidad es 4/3. Calcular la ecuación de la hipérbola.

27. Calcular la ecuación de una hipérbola equilátera sabiendo que su distancia focal es $8\sqrt{2}$.

28. El eje no focal de una hipérbola mide 8 y las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm\frac{2}{3}$. Calcular la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos y vértices.

29. Determina la posición relativa de la recta $x+y-1=0$ con respecto a la hipérbola $x^2-2y^2=1$

30. Una hipérbola equilátera pasa por el punto $(4, 1/2)$. Hallar su ecuación referida a sus asíntotas como ejes, y las coordenadas de los vértices y los focos.

31. Calcular la posición relativa de la recta $x+y-5=0$ respecto a la parábola $y^2=16x$

CAPÍTULO 7

SUPERFICIES

CAPÍTULO 7
SUPERFICIES

La geometría diferencial (término usado así por primera vez por Luigi Bianchi, 1856 - 1928, en 1894), se trata de un marco teórico más general en el cual se integran las geometrías no euclidianas y más que eso: todas las geometrías. La geometría ya no trata de puntos o rectas del espacio, sino de lo que se llama *variedades*.

El punto de partida puede decirse que era el trabajo realizado por Gauss en la construcción de mapas y la llamada geodesia, que apoyaría un nuevo enfoque sobre la naturaleza del espacio. Es decir: "*El problema de construir mapas planos de la superficie de la tierra fue uno de los que dio origen a la geometría diferencial, que se puede describir a grandes rasgos como la investigación de las propiedades de curvas y superficies en el entorno de un punto.*" [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 365]

La geometría diferencial trata de las propiedades de las curvas y superficies que varían de un punto a otro, y son sujetas a variaciones (de punto en punto) donde tiene sentido la utilización de las técnicas del Cálculo. Gauss, en su libro "*Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*" (Investigaciones generales sobre superficies curvas) ofreció la nueva idea que usaría Riemann: una superficie se podía ver como un espacio en sí mismo[16].

Una superficie es de hecho un conjunto de puntos de un espacio euclídeo que forma un espacio topológico bidimensional que localmente, es decir, visto de cerca se parece al espacio euclídeo bidimensional. Así alrededor de cada punto de una superficie esta se aproxima lo suficiente por el plano tangente a la superficie en dicho punto.

El texto anterior es un aparte de una interesante discusión apartir de la cual Gauss consigue introducir las que ahora llamamos formas **cuádricas fundamentales** o **superficies cuádricas**.

[16] http://www.centroedumatematica.com /aruiz/libros/Historia.

El OBJETIVO de este capítulo es que el estudiante logre:

- Aprender a reconocer las superficies cuádricas
- Graficar las superficies cuádricas en su sistema de referencia y en el sistema de referencia trasladado
- Calcular ecuaciones de las cuádricas en sistemas de referencia natural y en el sistema trasladado
- Identificar en la ecuación de una superficie cuádricas si hay una traslación, y recuperar la ecuación en el sistema de referencia más simple
- Encontrar los elementos de la superficie cuádricas

A continuación comenzaremos el estudio de las superficies cuádricas.

7.1 Definición de superficie

Una superficie es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una sola ecuación implícita de la forma $f(x, y, z) = 0$ (o también en forma explícita $z = g(x, y)$).

En el capítulo 3, se trató el caso más simple de una superficie que es un plano, ya que su ecuación es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. La ecuación de una superficie puede contener una o dos variables, por ejemplo, la ecuación $2x + 3y = 1$, en $\mathbb{R}^3$, corresponde a un plano perpendicular al plano xy, mientras que $z = 2$, en $\mathbb{R}^3$, corresponde a un plano paralelo al plano xy.

Para tener una idea de la superficie, se puede estudiar la naturaleza de sus secciones planas, es decir, se puede intersectar convenientemente la superficie por una serie de planos paralelos a los planos coordenados. Por ejemplo, un plano paralelo al plano xz pertenece a la familia de planos cuya ecuación es $y = k$, donde k es un valor arbitrario o parámetro. Luego la ecuación de la forma $f(x, y, z) = 0$ se transforma en $f(x, k, z) = 0$, $y = k$, que representa una curva en el espacio $\mathbb{R}^3$, y cuya naturaleza puede determinarse a través de la geometría analítica.

A continuación se describirán algunas de las superficies más representativas: Las superficies cilíndricas, las superficies cónicas, las superficies de revolución, las superficies esféricas y las superficies cuádricas.

7.2 Superficies cilíndricas

Una superficie cilíndrica o cilindro, es una superficie generada por una recta que se desplaza en forma paralela a una recta fija dada a largo de una curva fija, también dada. La recta que se mueve se llama *generatriz* y la curva dada se llama *directriz* (Ver Figura 7.1).

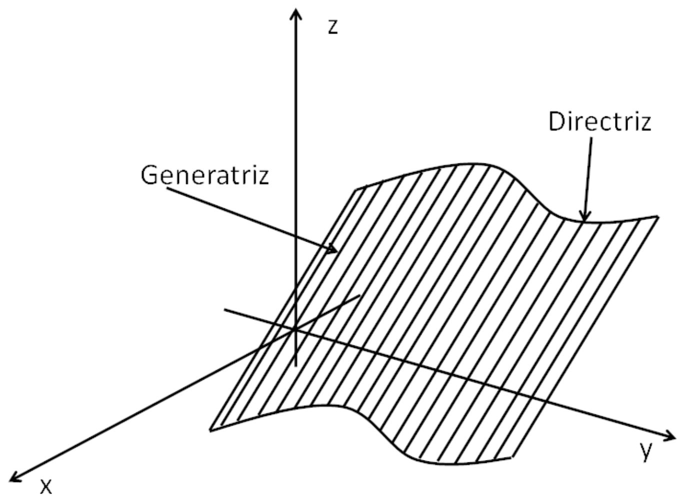


Figura 7.1: Superficie cilíndrica

Si para cada punto de una superficie existe una recta que pasa por dicho punto y que se encuentra contenida totalmente en la superficie, entonces, se dice que la superficie es *reglada*. Una *superficie reglada* es la que puede ser generada por el movimiento de una línea recta. Por lo tanto, una superficie cilíndrica es una superficie reglada.

Las superficies cilíndricas se clasifican según la naturaleza de sus directrices. Por ejemplo, si la directriz es una parábola, el cilindro es un cilindro parabólico; si la directriz es una circunferencia, es un cilindro circunferencial.

Además, si la generatriz del cilindro es perpendicular al plano donde se encuentra la curva, la superficie cilíndrica es recta (Cilindro recto). En otro caso, es una superficie cilíndrica oblicua o cilindro oblicuo (Ver Figura 7.2).

7.2.1 Ecuación de una superficie cilíndrica

Para encontrar la ecuación de una superficie cilíndrica, asumiremos que la directriz se encuentra en alguno de los planos coordenados.

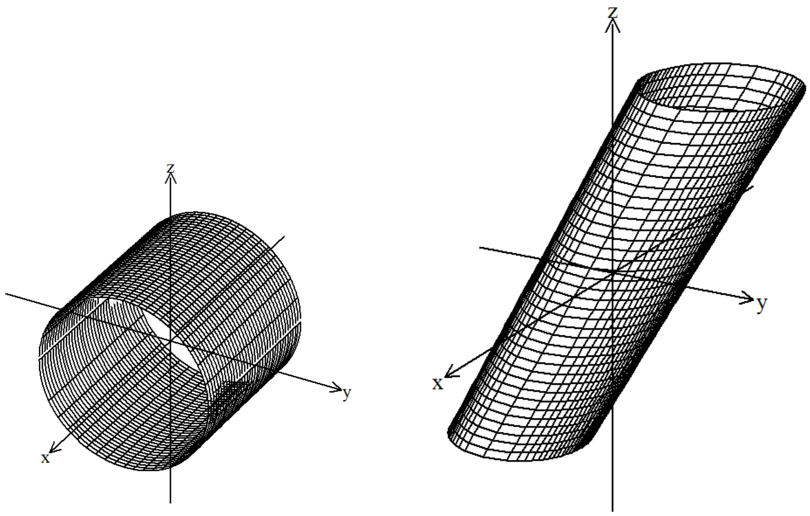


Figura 7.2: Superficie cilíndrica circunferencial recta y oblicua

Sea C una curva en el plano yz, cuya ecuación es de la forma $f(y,z)=0$, $x=0$, $P(x,y,z)$ un punto sobre la superficie, $P'(0,y',z')$ el punto donde la generatriz que pasa por P corta a la curva C y $A=\langle a,b,c\rangle$ el vector director de la recta generatriz (Ver Figura 7.3).

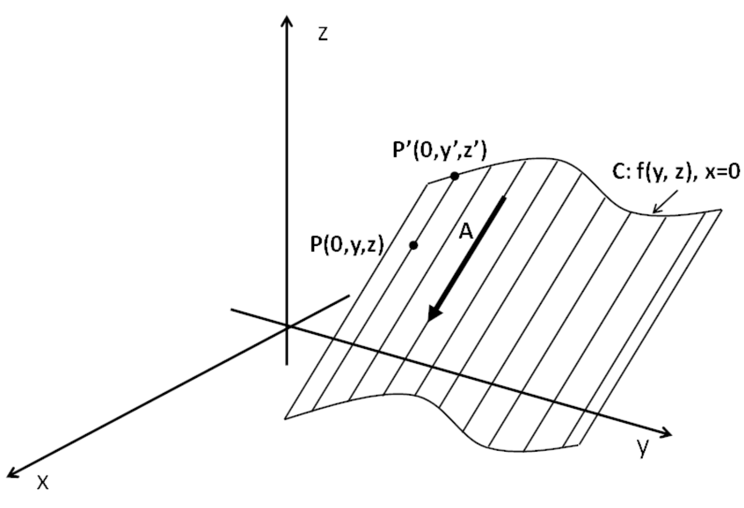


Figura 7.3: Superficie cilíndrica oblicua con directriz $f(y,z)=0$, $x=0$

Las ecuaciones de la generatriz son:

$$\frac{x}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}$$

Además, como P' está sobre la curva C, satisface la ecuación $f(y, z) = 0$, $x = 0$:

$$f(y', z') = 0, \; x' = 0,$$

luego, el punto P está sobre la superficie cilíndrica si las coordenadas (x, y, z) satisfacen ambas ecuaciones, donde, tomando a x', y' y z' como parámetros y eliminándolas de las dos expresiones, se obtiene una ecuación en las variables x, y, y z de la forma $f(x, y, z) = 0$, que es la ecuación de la superficie cilíndrica.

Si el cilindro es recto, la generatriz es perpendicular al plano de la curva, entonces tenemos que el vector director de la generatriz es $A = \langle a, 0, 0 \rangle$ (Ver Figura 7.4).

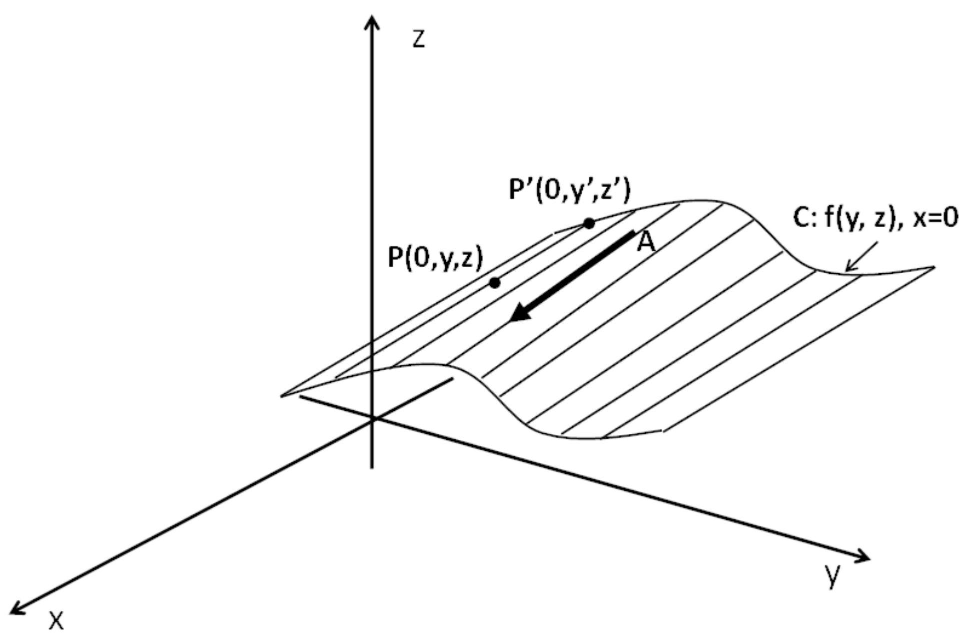


Figura 7.4: Superficie cilíndrica recta con directriz $f(y, z) = 0$, $x = 0$

La ecuación de la generatriz es:

$$x = a$$

Además, como P' está sobre la curva C, satisface la ecuación $f(y, z) = 0$, $x = 0$:

$$f(y', z') = 0, \; x' = 0$$

Luego, el punto P está sobre la superficie cilíndrica si las coordenadas (x, y, z) satisfacen ambas ecuaciones, donde, tomando a x', y' y z' como parámetros y eliminándolas de las dos expresiones, se obtiene una ecuación en las variables y y z de la forma $f(y, z) = 0$, que es la ecuación de la superficie cilíndrica recta.

Una superficie cilíndrica recta en el espacio, cuya directriz está en uno de los planos coordenados, tiene una ecuación implícita en dos variables. Por ejemplo, la ecuación $2x^2 - 3y^2 - 8 = 0$ es la ecuación de un cilindro recto cuya generatriz es perpendicular al plano xy.

Ejemplo 7.2.1 *Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la recta* $x - y = 1$, $z = 0$ *y cuyas generatrices son paralelas al vector* $A = \langle 0, 2, -1 \rangle$.

Solución

Un punto sobre la directriz y que está en la generatriz tiene por coordenadas $P'(x', y', 0)$ Las ecuaciones de la generatriz son:

$$x = x', \ \frac{y - y'}{2} = \frac{z}{-1}$$

Además, el punto satisface la ecuación de la curva, entonces

$$x'^{\,2} - y'^{\,2} = 1, \ z' = 0$$

De las ecuaciones de la generatriz se obtienen las expresiones:

$$x' = x$$

$$y' = y + 2z$$

Reemplazando en la ecuación de la curva se tiene:

$$x^2 - (y + 2z)^2 = 1$$

$$x^2 - 4z^2 - 4yz - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 1 = 0$$

La ecuación de la superficie cilíndrica es $x^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 1 = 0$ (Ver Figura 7.5).

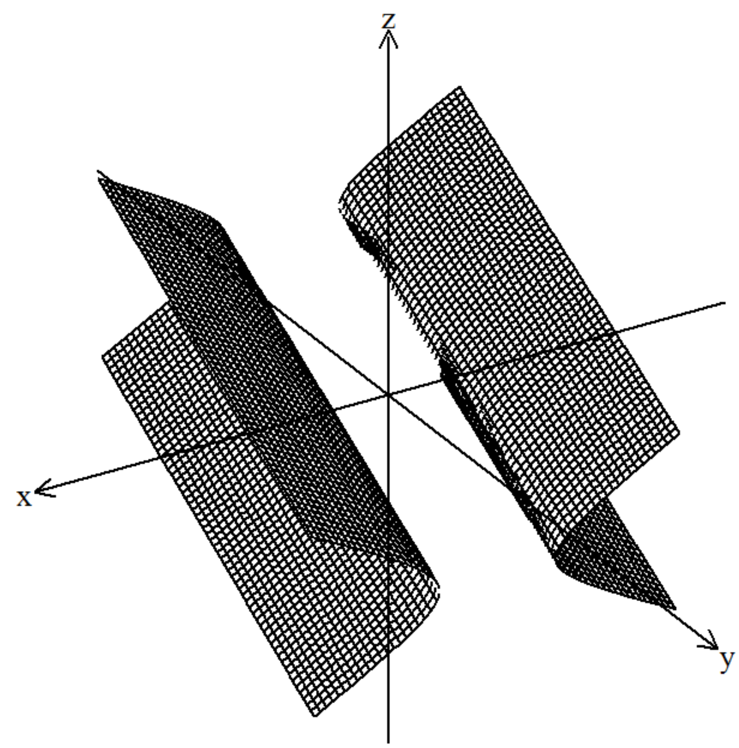


Figura 7.5: Superficie cilíndrica oblicua $x^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz - 1 = 0$

Ejemplo 7.2.2 *Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica recta cuya directriz es* $9x^2 + 4z^2 + 4z = 0,\ y = 0.$

Solución

Un punto sobre la directriz y que está en la generatriz tiene por coordenadas $P'(x', 0, z')$.
El vector director es $A = \langle 0, k, 0 \rangle$.
Las ecuaciones de la generatriz son:

$$x = x',\ y = k,\ z = z'$$

Además, el punto satisface la ecuación de la curva, entonces: $9x'^2 + 4z'^2 + 4z' = 0$, $y' = 0$.
Reemplazando en la ecuación de la curva se tiene:

$$9x'^2 + 4z'^2 + 4z' = 0, y' = 0$$

$$9x^2 + 4z^2 + 4z = 0$$

La ecuación de la superficie cilíndrica recta es $9x^2 + 4z^2 + 4z = 0$ (Ver Figura 7.6).

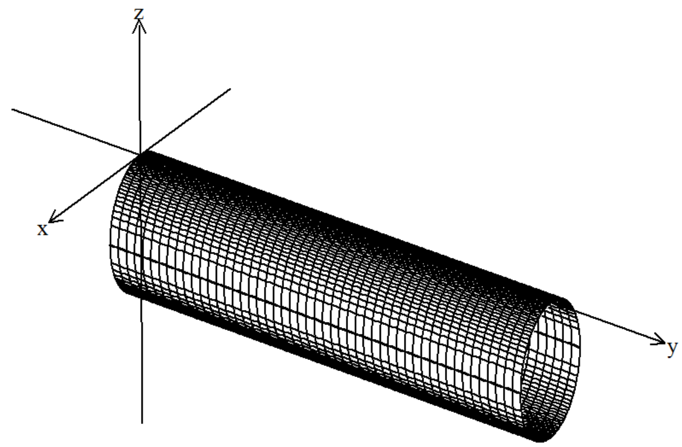


Figura 7.6: Superficie cilíndrica recta $9x^2 + 4z^2 + 4z = 0$

Ejemplo 7.2.3 *Demostrar que la ecuación* $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$ *representa una superficie cilíndrica. Hallar la ecuación de su directriz y el vector director de su generatriz.*

Solución

De la definición de superficie cilíndrica se deduce que las secciones hechas por planos paralelos al plano de la directriz son congruentes entre sí.
Entonces, las secciones con los planos $z = k$ son:

$$x^2 + y^2 + 5k^2 + 2kx + 4ky - 4 = 0, z = k$$

Completando los cuadrados perfectos tenemos:

$$(x + k)^2 + (y + 2k)^2 = 4, z = k$$

Esta ecuación corresponde a una familia de circunferencias de radio 2 con centro en $(-k, -2k, k)$. Entonces la ecuación dada corresponde a un cilindro circunferencial con directriz en el plano xy $(k = 0)$ cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 4, z = 0$$

El vector director de la recta que une los centros de las circunferencias es paralelo a la generatriz. El centro de la circunferencia en el plano $z = 0$ es $(0, 0, 0)$ y el centro de la circunferencia en el plano z=1 es $(-1, -2, 1)$, entonces el vector director de la generatriz es $A = \langle -1, -2, 1\rangle$. La superficie cilíndrica se muestra en la Figura 7.7.

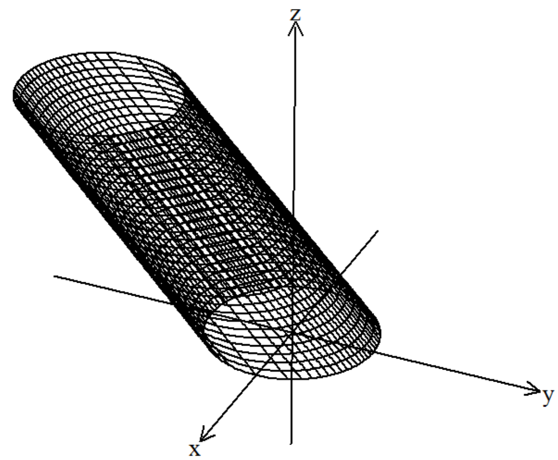


Figura 7.7: Superficie cilíndrica $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$

Ejercicios Sección 7.2.1

1. En cada caso se da la ecuación de la directriz y el vector director de la generatriz de una superficie cilíndrica. Hallar la ecuación de la superficie y realizar su representación gráfica.

a) $x^2 + y^2 = 9, z = 0,\ A = \langle 0, -1, 2\rangle$

b) $4x^2 + 9y^2 = 36, z = 0,\ A = \langle 1, 1, -1\rangle$

c) $x^2 - 9y^2 = 36, z = 0,\ A = \langle 2, 0, 1\rangle$

d) $x^2 = 4z, y = 0,\ A = \langle 1, 1, 1\rangle$

e) $y^2 - z^2 = 36, x = 0,\ A = \langle -2, -1, 0\rangle$

f) $16y^2 + 9z^2 = 36, x = 0,\ A = \langle 1, 2, 1\rangle$

2. Encuentre la ecuación de la superficie cilíndrica recta para cada ecuación de directriz dada. Bosqueje su gráfica.

a) $x^2 - 9y^2 = 36, z = 0$

b) $25x^2 + 50y^2 = 50, z = 0$

c) $16y^2 + 9z^2 = 144, x = 0$

d) $2x^2 - 4z^2 = 16, y = 0$

e) $3y^2 - 27z^2 = 54, x = 2$

3. Demuestre que la ecuación dada es una superficie cilíndrica y encuentre la ecuación de la directriz y el vector director de la generatriz.

a) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6 = 0$

b) $17x^2 2y^2 + z^2 - 8xy - 6xz - 2 = 0$

c) $xz + 2yz - 1 = 0$

d) $4x^2 + 4xy - z^2 + y^2 + 1 = 0$

e) $z^2 + y^2 + 5x^2 + 2xz + 4xy - 4 = 0$

7.3 Superficies cónicas

Una superficie cónica o cono, es una superficie generada por una recta que se desplaza de tal manera que siempre pasa por una curva fija, y un punto fijo, no contenido en el plano de la curva. La recta que se mueve se llama generatriz, la curva fija, directriz y el punto fijo, vértice (Ver Figura 7.8).

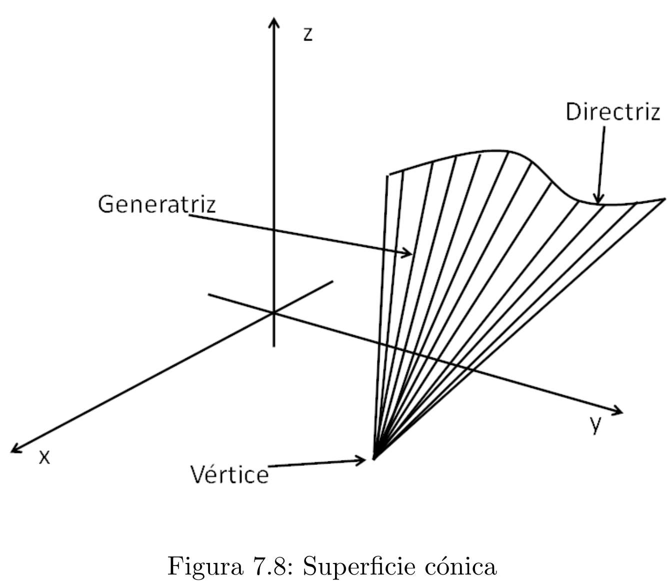


Figura 7.8: Superficie cónica

Las superficies cónicas se clasifican según la naturaleza de sus directrices. Por ejemplo, si la directriz es una parábola, el cono es un cono parabólico; si la directriz es una circunferencia, es un cono circunferencial.

7.3.1 Ecuación de una superficie cónica

Para encontrar la ecuación de una superficie cónica, asumiremos que la directriz se encuentra en un plano paralelo a los planos coordenados.
Sea C una curva en un plano paralelo a yz, cuya ecuación es de la forma $f(y,z)=0$, $x=k$, $P(x,y,z)$ un punto sobre la superficie, $P'(x',y',z')$ el punto donde la generatriz que pasa por P corta a la curva C y $V=(a,b,c)$ el vértice de la superficie cónica.

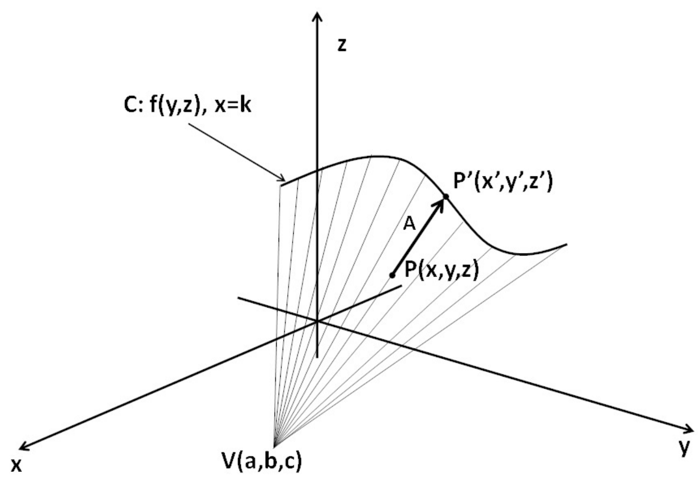


Figura 7.9: Superficie cónica con directriz $f(y,z)=0, x=k$

El vector director de la generatriz es $A=\langle x'-a, y'-b, z'-c\rangle$. Y las ecuaciones de la generatriz son:

$$\frac{x-a}{x'-a}=\frac{y-b}{y'-b}=\frac{z-c}{z'-c}$$

Con $x'=k$ tenemos:

$$\frac{x-a}{k-a}=\frac{y-b}{y'-b}=\frac{z-c}{z'-c}$$

Además, como P' está sobre la curva C, satisface la ecuación $f(y,z)=0$, $x=k$:

$$f(y',z')=0,\ x'=k$$

luego, el punto P está sobre la superficie cónica si las coordenadas (x,y,z) satisfacen ambas ecuaciones, donde, tomando a x', y' y z' como parámetros y eliminándolas de las dos expresiones, se obtiene una ecuación en las variables x, y, y z de la forma $f(x,y,z)=0$, que es la ecuación de la superficie cónica.

Al estudiar una superficie cónica se puede tomar como vértice el origen sin perder generalidad. Con $V(0,0,0)$, se obtiene como ecuaciones de la generatriz:

$$\frac{x}{k}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$$

Al eliminar a x', y' y z' se obtiene una ecuación de la forma $f(x, y, z) = 0$ homogénea, es decir, cuyos términos son del mismo grado.

Ejemplo 7.3.1 *Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es* $9x^2 + 4y^2 = 36,\ z = 0$ *y cuyo vértice es* $(1, 1, 1)$.

Solución

La ecuación de la directriz corresponde a una elipse en el plano xy. Luego, la superficie cónica es elíptica. Un punto sobre la directriz y que está en la generatriz tiene por coordenadas $P'(x', y', 0)$, las ecuaciones de la generatriz son:

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-1}{z'-1}$$

Con $z' = 0$ tenemos:

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-1}{-1}$$

Además, el punto P' satisface la ecuación de la curva, entonces:

$$9x'^{\,2} + 4y'^{\,2} = 36, z' = 0$$

De las ecuaciones de la generatriz se obtienen las expresiones:

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{z-1}{-1} \qquad \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-1}{-1}$$

$$x' = \frac{z-x}{z-1} \qquad y' = \frac{z-y}{z-1}$$

Reemplazando x' y y' en la ecuación $9x'^{\,2} + 4y'^{\,2} = 36, z' = 0$ tenemos:

$$9\left(\frac{z-x}{z-1}\right)^2 + 4\left(\frac{z-y}{z-1}\right)^2 = 36$$

Desarrollando y simplificando se obtiene:

$$9\frac{(z-x)^2}{(z-1)^2} + 4\frac{(z-y)^2}{(z-1)^2} = 36$$

$$9(z-x)^2 + 4(z-y)^2 = 36(z-1)^2$$

$$9x^2 + 4y^2 - 23z^2 - 18xz - 8yz + 72z - 36 = 0$$

La ecuación de la superficie cónica elíptica es $9x^2+4y^2-23z^2-18xz-8yz+72z-36 = 0$ (Ver Figura 7.10).

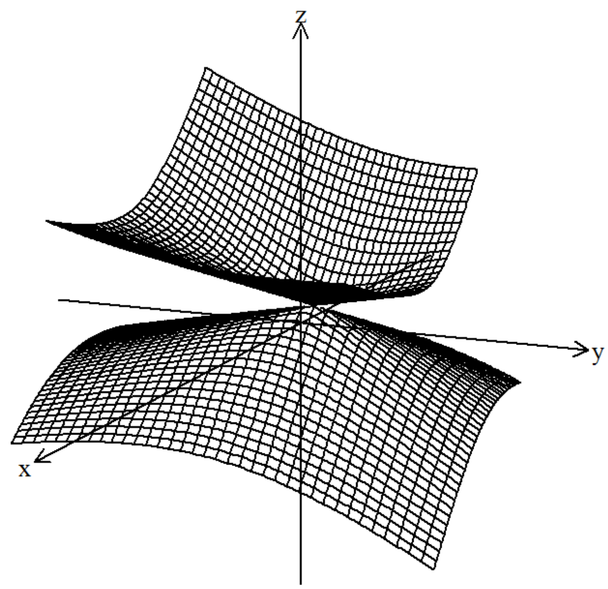


Figura 7.10: Superficie cónica $9x^2 + 4y^2 - 23z^2 - 18xz - 8yz + 72z - 36 = 0$

Ejemplo 7.3.2 *Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la* $x^2 - 4z^2 = 4,\ y = 4$ *y cuyo vértice es el origen.*

Solución

La ecuación de la directriz corresponde a una hipérbola en un plano paralelo a xz, luego, la superficie cónica es hiperbólica.
Un punto sobre la directriz y que está en la generatriz tiene por coordenadas $P'(x', 4, z')$
Las ecuaciones de la generatriz son:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

con $y' = 4$ tenemos:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{4} = \frac{z}{z'}$$

Además, el punto P' satisface la ecuación de la curva, entonces:

$$x'^{\,2} - 4z'^{\,2} = 4, y' = 4$$

De las ecuaciones de la generatriz se obtienen las expresiones:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{4} \qquad \frac{y}{4} = \frac{z}{z'}$$

$$x' = \frac{4x}{y} \qquad z' = \frac{4z}{y}$$

Reemplazando x' y z' en la ecuación $x'^{\,2} - 4z'^{\,2} = 4, y' = 4$ tenemos:

$$\left(\frac{4x}{y}\right)^2 - 4\left(\frac{4z}{y}\right)^2 = 4$$
$$\frac{16x^2}{y^2} - \frac{64z^2}{y^2} = 4$$
$$16x^2 - 64z^2 = 4y^2$$

Luego, la ecuación de la superficie cónica es $16x^2 - 64z^2 - 4y^2 = 0$ (Ver Figura 7.11).

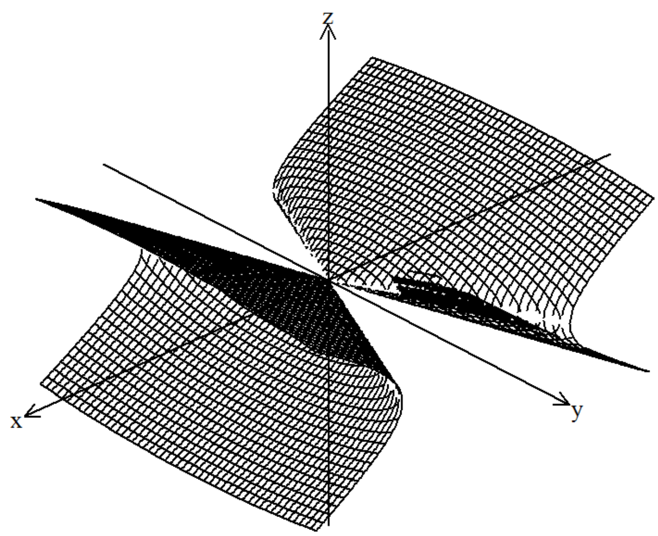


Figura 7.11: Superficie cónica $16x^2 - 64z^2 - 4y^2 = 0$

Ejemplo 7.3.3 *Probar que la ecuación* $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 0$ *corresponde a una superficie cónica. Hallar la ecuación de la directriz.*

Solución

La ecuación dada es una ecuación homogénea de grado dos, la cual corresponde a la ecuación de una superficie cónica. Para hallar la ecuación de su directriz, cortamos el cono con un plano paralelo a uno de los planos coordenados. Con $x = k$ tenemos

$$4k^2 - 9y^2 - z^2 = 0, \quad x = k$$
$$-9y^2 - z^2 = -4k^2, \quad x = k$$
$$9y^2 + z^2 = 4k^2, \quad x = k$$

Esta ecuación corresponde a una elipse con centro en $(k, 0, 0)$. Luego, la superficie es un cono elíptico (Ver Figura 7.12).

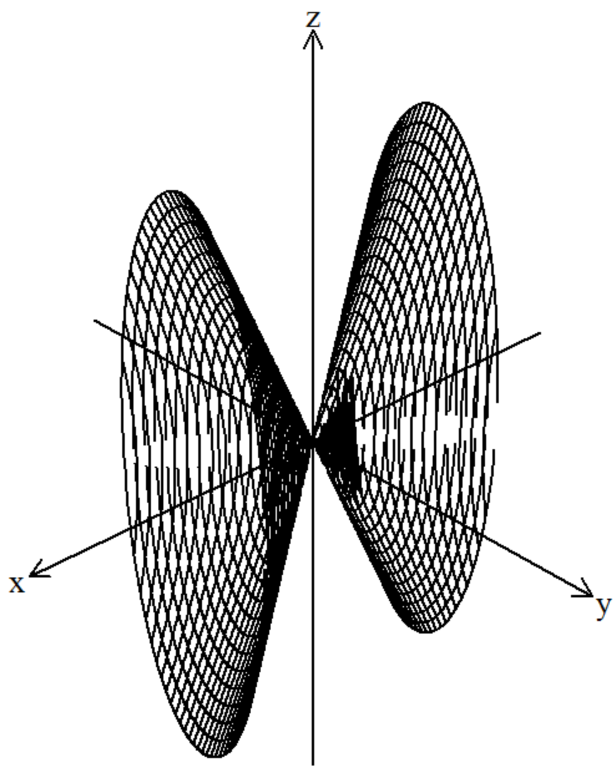


Figura 7.12: Superficie cónica elíptica $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 0$

Ejercicios Sección 7.3.1

1. Hallar la ecuación de la superficie cónica a partir de la ecuación de la directriz y el vértice dados. Bosqueje su gráfica.

a) $x^2 + 2y^2 = 4, z = 2$; $V(0, 0, 0)$

b) $4x^2 - 6y^2 = 12, z = -1$; $V(1, 0, 1)$

c) $y^2 - z^2 = 9, x = 3$; $V(1, 1, 1)$

d) $4x^2 + z^2 + 4z = 0$; $V(1, -1, 1)$

e) $x^2 + y^2 = 9$; $V(0, 0, 0)$

f) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y = 2$; $V(0, 0, 0)$

2. identifique y construya la superficie dada.

a) $x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$

c) $9x^2 + 9z^2 - y^2 = 0$

d) $4x^2 - z^2 - y^2 = 0$; $V(1, -1, 1)$

e) $xy + xz + yz = 0$

f) $2z^2 - 4x^2 - y^2 = 0$

g) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 4z + 1 = 0$

7.4 Superficies de revolución

Una superficie de revolución es una superficie generada por la rotación de una curva plana, llamada *generatriz*, alrededor de una recta fija, llamada *eje de revolución*, que está en el mismo plano de la curva. Cualquier posición de la generatriz se llama *sección meridiana o meridiano*, y cada circunferencia que se describe por cada punto de la generatriz se llama *paralelo* de la superficie (Ver Figura 7.13).

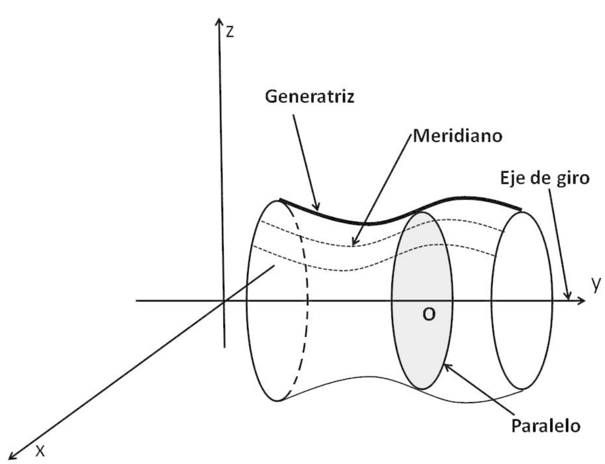


Figura 7.13: Superficie de revolución

7.4.1 Ecuación de una superficie de revolución

Supongamos que la generatriz es una curva plana, contenida en uno de los planos coordenados y el eje de revolución o de giro es uno de los ejes coordenados.
Sea $z = f(y), x = 0$ una curva plana contenida en el plano yz, la cual rotaremos alrededor del eje y (Ver Figura 7.14 arriba).

Al rotar la curva alrededor del eje y se obtiene la superficie mostrada en la Figura 7.14 (abajo).

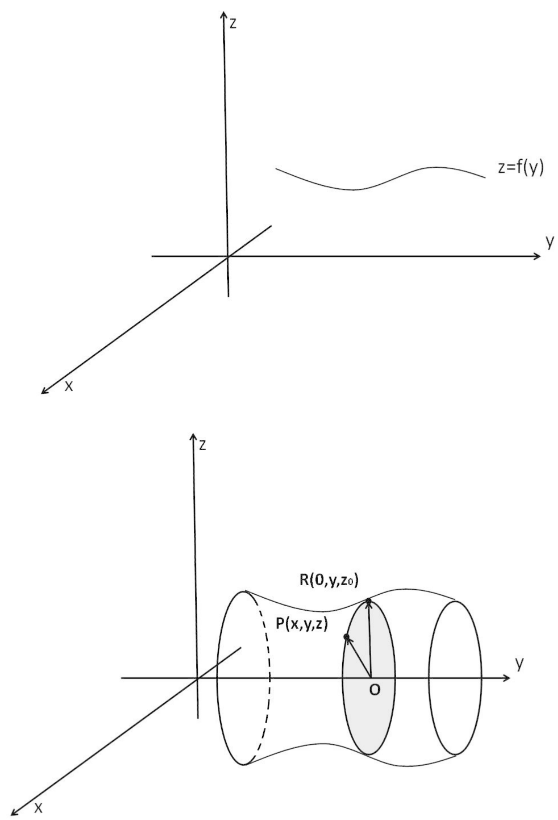


Figura 7.14: Gráfica de $z = f(y), x = 0$ (arriba), superficie que se consigue al rotar alrededor del eje y (abajo)

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera en la superficie y $R(0, y, z_0)$, el punto donde un plano perpendicular al eje de rotación y, corta a la curva $z = f(y)$. Las coordenadas de O son $O(0, y, 0)$.

De la Figura 7.14 (Derecha) se tiene que:

$$|\overline{OP}| = |\overline{OR}|$$

Además,

$$|\overline{OR}| = \sqrt{(z_0 - 0)^2} = |z_0|$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cómo z_0 debe satisfacer la ecuación de la curva, $z_0 = f(y)$, entonces:

$$|f(y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces la ecuación de la superficie de revolución es de la forma:

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

De forma análoga, se procede si la generatriz está en otro de los planos coordenados.

En la Tabla 7.1 se muestran las diferentes formas de las ecuaciones de superficies de revolución de acuerdo al plano donde se encuentra la generatriz y el eje de giro.

Ecuación de la generatriz	Eje de rotación	Ecuación de la superficie de revolución
$f(x, y) = 0, z = 0$	x	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
$f(x, y) = 0, z = 0$	y	$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$f(y, z) = 0, x = 0$	y	$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
$f(y, z) = 0, x = 0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$f(x, z) = 0, y = 0$	x	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
$f(x, z) = 0, y = 0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

Tabla 7.1: Ecuación de una superficie de revolución según el eje de rotación

Ejemplo 7.4.1 *Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de la curva* $y^2 - 2x^2 + 4x = 6, z = 0$ *alrededor del eje* x

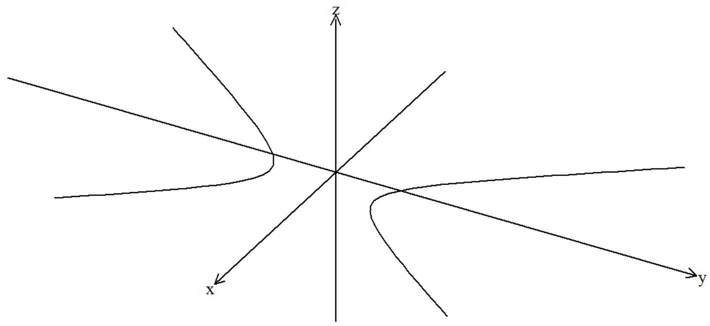
Solución

La ecuación de la curva es de la forma $f(x, y) = 0, x = 0$ y se va a rotar alrededor del eje x. Su gráfica se muestra en la Figura 7.15 (arriba).

La ecuación de la superficie de revolución es de la forma $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$. Entonces:

$$(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 - 2x^2 + 4x = 6$$
$$y^2 + z^2 - 2x^2 + 4x = 6$$
$$y^2 + z^2 - 2x^2 + 4x - 6 = 0$$

La gráfica de la superficie se muestra en la Figura 7.15 (abajo).



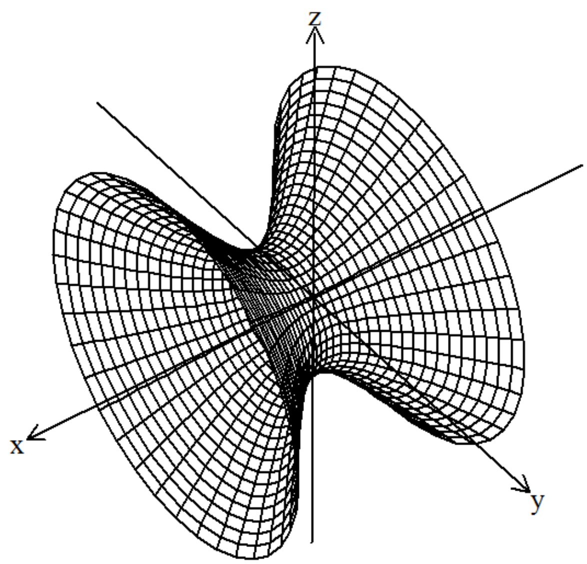


Figura 7.15: Gráfica de $y^2 - 2x^2 + 4x = 6, z = 0$ (arriba), gráfica de $y^2 + z^2 - 2x^2 + 4x - 6 = 0$ (abajo)

Ejemplo 7.4.2 *Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de la curva* $z + x^2 = 4, y = 0$ *alrededor del eje* z

Solución

La ecuación de la curva es de la forma $f(x, z) = 0, y = 0$ y se va a rotar alrededor del eje z. Su gráfica se ilustra en la Figura 7.16 (izquierda).

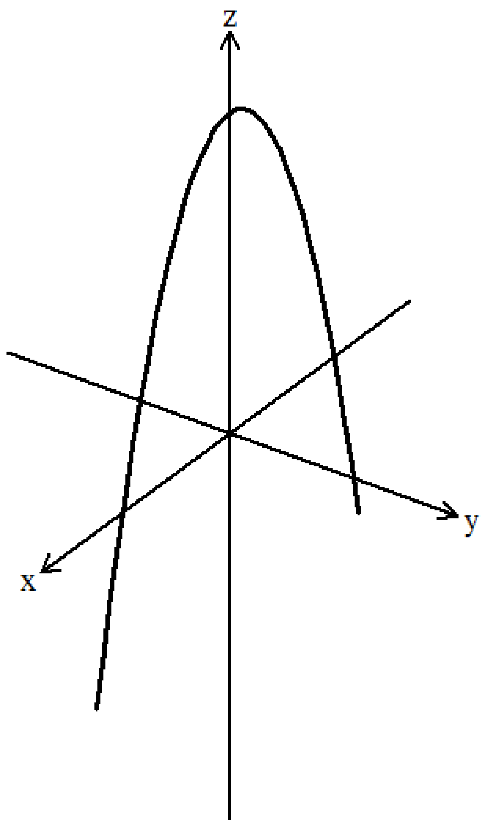
Luego, la ecuación de la superficie de revolución es de la forma $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. Entonces:

$$z + (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 4$$

$$z + x^2 + y^2 = 4$$

$$z + x^2 + y^2 - 4 = 0$$

La gráfica de la superficie se muestra en la Figura 7.16 (derecha).



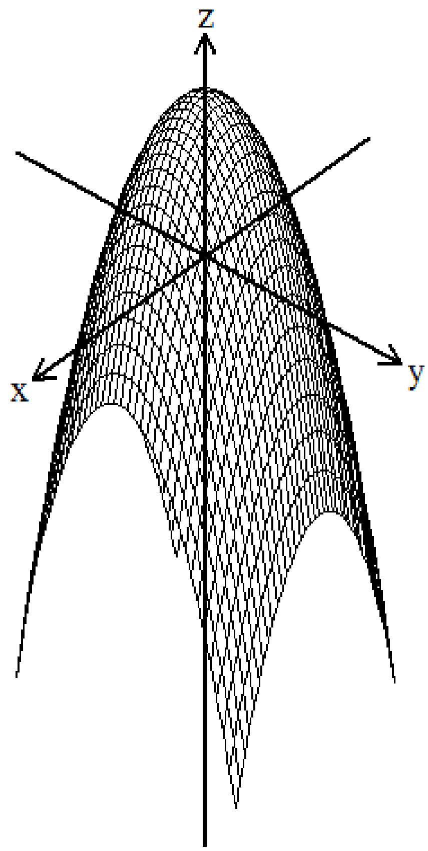


Figura 7.16: Gráfica de $z + x^2 = 4, y = 0$ (izquierda), gráfica de $z + x^2 + y^2 - 4 = 0$ (derecha)

Ejemplo 7.4.3 *Demostrar que la ecuación* $x^2 - y^2 + z^2 + 2y - 5 = 0$ *es una superficie de revolución. Hallar el eje de giro y la ecuación de la generatriz.*

Solución

Una superficie de revolución tiene como característica que las trazas con planos perpendiculares al eje de giro son circunferencias.
Al cortar la superficie con planos de la forma $z = k$, obtenemos:

$$x^2 - y^2 + k^2 + 2y - 5 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2y = 5 - k^2, z = k$$

Esta ecuación corresponde a una hipérbola en un plano paralelo a xy.
Ahora, cortemos la superficie con planos de la forma $y = k$

$$x^2 - k^2 + z^2 + 2k - 5 = 0$$

$$x^2 + z^2 = 5 + k^2 - 2k, y = k \text{ con } k^2 - 2k > -5$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia en un plano paralelo a xz, luego la ecuación $x^2 - y^2 + z^2 + 2y - 5 = 0$ es la ecuación de una superficie de revolución (Ver Figura 7.17).

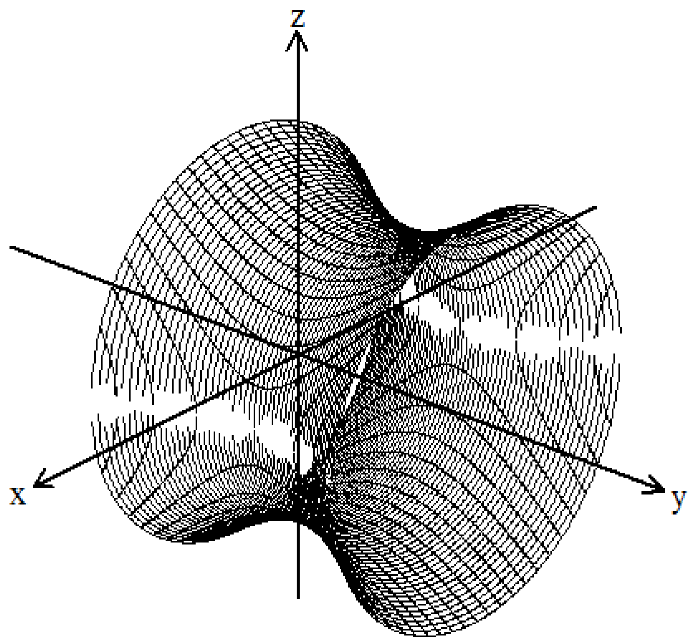


Figura 7.17: Gráfica de $x^2 - y^2 + z^2 + 2y - 5 = 0$

Ejercicios Sección 7.4.1

Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de la curva dada, alrededor del eje indicado. Construya la superficie. (Puede emplear algún software para eso).

1. $4x^2 + z^2 = 16, y = 0$; alrededor del eje z
2. $4x^2 + z^2 = 16, y = 0$; alrededor del eje x
3. $y = 4x, z = 0$; alrededor del eje x
4. $9x^2 + 4y^2 = 4, z = 0$; alrededor del eje y
5. $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$; alrededor del eje x
6. $x^2 - 4x + y^2 - 21 = 0, z = 0$; alrededor del eje y

Demostrar que la ecuación dada es una superficie de revolución.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
2. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
3. $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$
4. $8x^2 + 8y^2 = 36 - 18z$
5. $4x - y^2 - z^2 = 0$
6. $16x^2 + 9y^2 = z^2$
7. $4x^2 - z + 4y^2 = 8$
8. $16x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 144$

7.5 Superficie esférica

Una superficie esférica o esfera, es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo, llamado centro. La distancia constante se llama radio. Sea $C(x_0, y_0, z_0)$ las coordenadas cartesianas del centro y $P(x, y, z)$, un punto sobre la superficie esférica (Ver Figura 7.18).

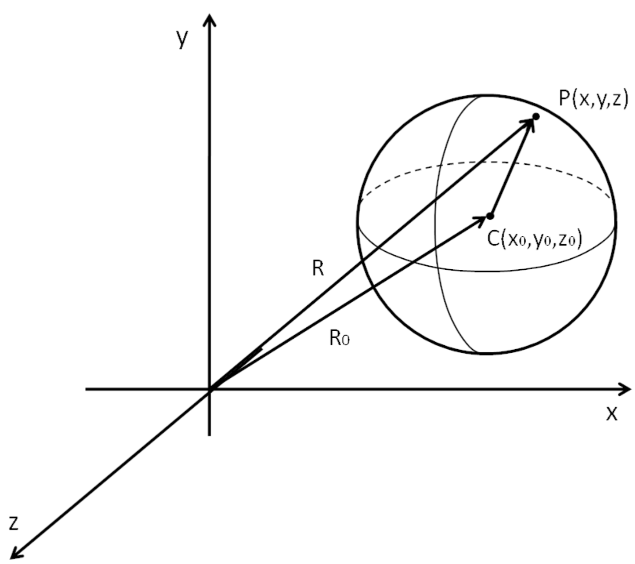


Figura 7.18: Superficie esférica

El vector posición del centro C, R_0, tiene componentes $R_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

El vector posición del punto P, R, tiene componentes $R = \langle x, y, z\rangle$. Luego, el vector CP es:

$$CP = R - R_0 = \langle x, y, z\rangle - \langle x_0, y_0, z_0\rangle$$

$$CP = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$$

La magnitud de CP es el radio de la superficie esférica r:

$$|CP| = r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

luego:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{7.5.1}$$

La ecuación 7.5.1 se denomina *ecuación canónica de la superficie esférica*.

Si el centro está en el origen de coordenadas, $C(0, 0, 0)$, la ecuación se transforma en

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{7.5.2}$$

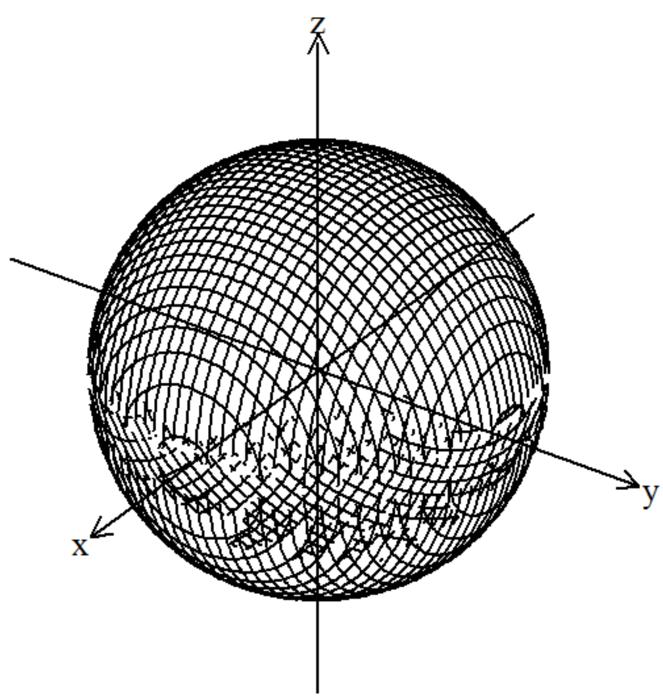


Figura 7.19: Superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, con centro en $C(0, 0, 0)$

Desarrollando la ecuación 7.5.1 tenemos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xx_0 + {x_0}^2 + y^2 - 2yy_0 + {y_0}^2 + z^2 - 2zz_0 + {z_0}^2 = r^2$$

organizando términos

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 - r^2 = 0$$

siendo $G = -2x_0$, $H = -2y_0$, $I = -2z_0$ y $J = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 - r^2$, la ecuación se transforma en:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{7.5.3}$$

La ecuación 7.5.3 se denomina *ecuación general de la superficie esférica*.

Conociendo que $G = -2x_0$, $H = -2y_0$ y $I = -2z_0$, podemos deducir que $x_0 = -\frac{G}{2}$, $y_0 = -\frac{H}{2}$ y $z_0 = -\frac{I}{2}$, luego las coordenadas del centro de la superficie esférica son:

$$C(x_0, y_0, z_0) = C\left(-\frac{G}{2}, -\frac{H}{2}, -\frac{I}{2}\right) \tag{7.5.4}$$

Además, como $J = {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 - r^2$, tenemos que el radio de la superficie esférica es:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{G^2 + H^2 + I^2 - 4J} \tag{7.5.5}$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si $G^2 + H^2 + I^2 - 4J > 0$, se tiene una esfera de radio r.
2. Si $G^2 + H^2 + I^2 - 4J = 0$, se tiene el punto $C(x_0, y_0, z_0)$.
3. Si $G^2 + H^2 + I^2 - 4J < 0$, no existe superficie.

Ejemplo 7.5.1 *Hallar el centro y radio de la superficie esférica* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y - 6z + 29 = 0$.

Solución

Teniendo en cuenta la expresión 7.5.4:

$$C(x_0, y_0, z_0) = C\left(-\frac{G}{2}, -\frac{H}{2}, -\frac{I}{2}\right)$$

Tenemos que:

$$C\left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{(-10)}{2}, -\frac{(-6)}{2}\right)$$

entonces, el centro de la superficie esférica es: $C(2,5,3)$ Con la ecuación 7.5.5 tenemos que el radio es:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{G^2 + H^2 + I^2 - 4J} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-10)^2 + (-6)^2 - 4(29)}$$

luego, el radio de la superficie esférica es $r = 3$. En la Figura 7.20 se muestra la gráfica de la superficie esférica.

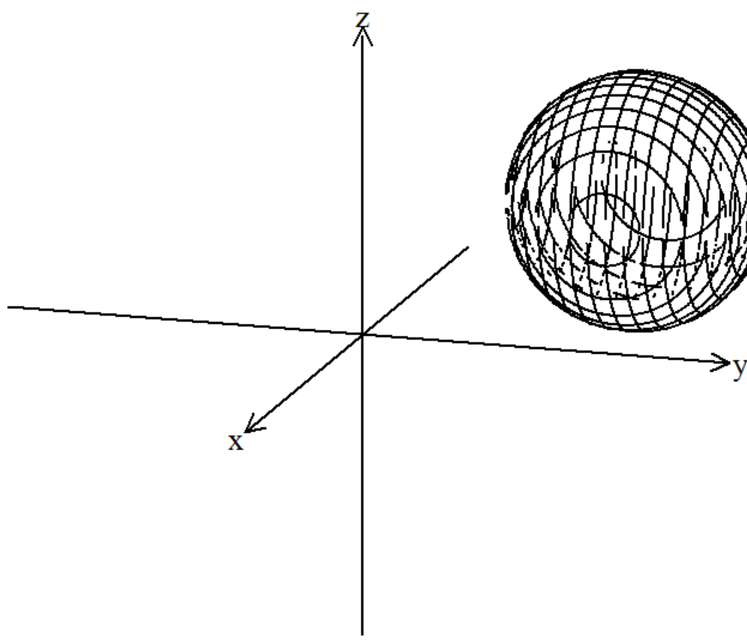


Figura 7.20: Superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y - 6z + 29 = 0$

Observacion

Notemos que en el ejercicio anterior, también se podría haber usado la factorización como medio para transformar la ecuación en una forma más simple, por ejemplo, si factorizamos completando cuadrados en cada variable x, y y z, obtenemos:

$$(x^2 - 4x + \mathbf{4}) + (y^2 - 10y + \mathbf{25}) + (z^2 - 6z + \mathbf{9}) = -29 + \mathbf{4} + \mathbf{25} + \mathbf{9}$$

simplificando y factorizando la expresión anterior conseguimos

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9$$

en donde queda identificado el centro $C = (2,5,3)$ y el radio $r = \sqrt{9} = 3$.

Ejemplo 7.5.2 *Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por los puntos* $(5,-3,7)$, $(2,0,1)$, $(0,-2,0)$ *y* $(-2,1,2)$.

Solución

Como los puntos pertenecen a la superficie esférica, satisfacen la ecuación 7.5.3

$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$$

sustituyendo cada uno de los puntos, tenemos:

$$(5)^2+(-3)^2+(7)^2+G(5)+H(-3)+I(7)+J=0$$

$$5G-3H+7I+J=-83$$

$$(2)^2+(0)^2+(1)^2+G(2)+H(0)+I(1)+J=0$$

$$2G+I+J=-5$$

$$(0)^2+(-2)^2+(0)^2+G(0)+H(-2)+I(0)+J=0$$

$$-2H+J=-4$$

$$(-2)^2+(1)^2+(2)^2+G(-2)+H(1)+I(2)+J=0$$

$$-2G+H+2I+J=-9$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$5G-3H+7I+J=-83$$

$$2G+I+J=-5$$

$$-2H+J=-4$$

$$-2G+H+2I+J=-9$$

Solucionando obtenemos que $G=-\frac{1}{3}$, $H=5$, $I=-\frac{31}{3}$ y $J=6$ Reemplazando en la ecuación 7.5.2 tenemos:

$$x^2+y^2+z^2-\tfrac{1}{3}x+5y-\tfrac{31}{3}z+6=0$$

Luego, la ecuación de la superficie esférica es $3x^2+3y^2+3z^2-x+15y-31z+18=0$ (Ver Figura 7.21).

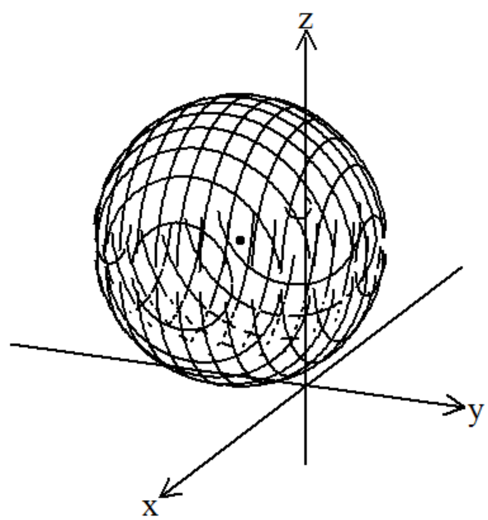


Figura 7.21: Superficie esférica $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - x + 15y - 31z + 18 = 0$

Ejemplo 7.5.3 *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie esférica* $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 4 = 0$ *en el punto* $Q(-3, -3, 4)$.

Solución

Hallemos el centro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 4 = 0$

$$C\left(-\frac{(4)}{2}, -\frac{(6)}{2}, -\frac{(-2)}{2}\right)$$

$$C(-2, -3, 1)$$

Ahora, el vector CP es:

$$CP = \langle -3 + 2, -3 + 3, 4 - 1 \rangle = \langle -1, 0, 3 \rangle$$

Este vector es perpendicular al plano tangente a la superficie esférica, luego, CP es el vector normal del plano. Entonces, el plano es de la forma:

$$-x + 3z + d = 0$$

como el punto $Q(-3, -3, 4)$ pertenece a la superficie esférica y al plano tangente, satisface la expresión anterior, entonces:

$$-(-3) + 3(4) + d = 0 \quad \text{que implíca} \quad d = -15$$

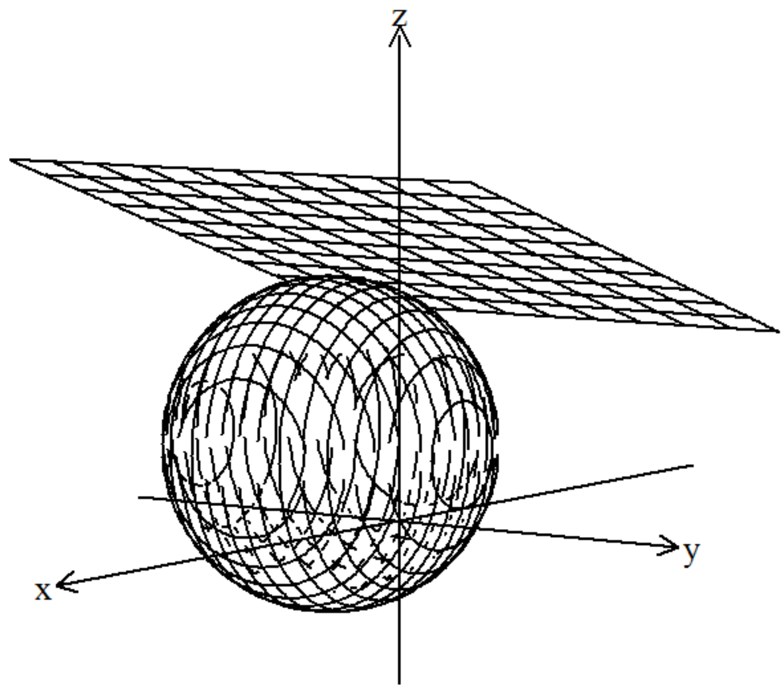


Figura 7.22: Plano $-x+3z-15=0$ tangente a la superficie esférica $x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z+4=0$ en el punto $Q(-3,-3,4)$

Luego la ecuación del plano tangente a la superficie esférica en el punto $Q(-3,-3,4)$ es:

$$-x+3z-15=0$$

La gráfica del plano tangente a la superficie esférica dada se muestra en la Figura 7.22.

Ejercicios Sección 7.5.1

1. Hallar la ecuación de la superficie esférica dado su centro C y su radio r.

a) $C(2,-2,3)$, $r=2$

b) $C(-3,0,1)$, $r=4$

c) $C(0,2,4)$, $r=1$

d) $C(0,0,0)$, $r=\frac{1}{3}$

e) $C(\frac{2}{3},-2,-\frac{3}{2})$, $r=5$

f) $C(-\frac{1}{2},1,-2)$, $r=\frac{2}{5}$

2. Hallar el centro y el radio de cada superficie esférica.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 22 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z - 32 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 11x + 5y - 7z - 15 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 6 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 9x + 12y - 5z - 14 = 0$

f) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4x + 2y - 6z - 22 = 0$

g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$

h) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8x + 12y - 10z + 10 = 0$

3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie esférica dada en el punto especificado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; $(6, 2, -3)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 101 = 0$; $(-5, 4, 2)$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z = 0$; $(0, 0, 0)$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 15 = 0$; $(3, 0, 2)$

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4z + 3 = 0$; $(0, -2, 1)$

4. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos dados.

a) $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 3)$, $(5, 2, 6)$

b) $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(4, 0, 2)$, $(-1, 2, 3)$

c) $(8, 2, 2)$, $(-4, 3, -3)$, $(-1, 2, 5)$, $(4, 3, -7)$

d) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$

e) $(1, 3, 2)$, $(3, 2, -5)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$

f) $(2, 1, 3)$, $(3, -2, 1)$, $(-4, 1, 1)$, $(1, 1, -3)$

5. Dadas las superficies esféricas $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + G_1x + H_1y + I_1z + J_1 = 0$ y $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + G_2x + H_2y + I_2z + J_2 = 0$, no concéntricas. Demostrar que la ecuación $S_1 + kS_2 = 0$ representa la ecuación de un plano para $k = -1$. A este plano se le denomina *plano radical*.

6. Hallar la ecuación del plano radical de las dos superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 10 = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z + 12 = 0$.

7. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las dos superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 10 = 0$ y por el punto $(-2, 4, 0)$.

8. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las dos superficies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 12 = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 12 = 0$, y es tangente al plano $x + 2y - 2z = 3$.

9. Hallar la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tienen su centro en la recta $x = 2$, $y = 0$.

10. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$, y $(1, -3, 0)$ y tiene su centro en el plano $x + y + z = 0$.

7.6 Superficies cuádricas

Una superficie cuádrica es una superficie cuya ecuación de segundo grado es de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, donde al menos uno de los coeficientes A, B, C, D, E y F es diferente de cero. Las superficies cuádricas se caracterizan porque las trazas con los planos coordenados o con planos paralelos a ellos son líneas cónicas. Para graficar las superficies cuádricas analizaremos los siguientes elementos:

1. Interceptos con los ejes coordenados.

   Para hallar los interceptos de la superficie con los ejes coordenados, hacemos cero dos de las coordenadas, así:

a) Interceptos con el eje x: hacemos $y = 0$, $z = 0$ y sustituimos en la ecuación de la superficie para hallar el valor de la coordenada x.

b) Interceptos con el eje y: hacemos $x = 0$, $z = 0$ y sustituimos en la ecuación de la superficie para hallar el valor de la coordenada y.

c) Interceptos con el eje z: hacemos $x = 0$, $y = 0$ y sustituimos en la ecuación de la superficie para hallar el valor de la coordenada z.

2. Trazas con los planos coordenados o con planos paralelos. primero, hallamos la intersección de la superficie con los planos coordenados o con planos paralelos a ellos. Se pueden presentar:

a) Trazas con el plano coordenado xy: se hace $z = 0$ en la ecuación de la superficie, $f(x, y, z) = 0$, obteniéndose una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, $z = 0$. Para las trazas con planos paralelos al plano xy, se hace $z = k$, obteniéndose una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, $z = k$.

b) Trazas con el plano coordenado xz: se hace $y = 0$ en la ecuación de la superficie, $f(x, y, z) = 0$, obteniéndose una ecuación de la forma $f(x, z) = 0$, $y = 0$. Para las trazas con planos paralelos al plano xz, se hace $y = k$, obteniéndose una ecuación de la forma $f(x, z) = 0$, $y = k$.

c) Trazas con el plano coordenado yz: se hace $x = 0$ en la ecuación de la superficie, $f(x, y, z) = 0$, obteniéndose una ecuación de la forma $f(y, z) = 0$, $x = 0$. Para las trazas con planos paralelos al plano yz, se hace $x = k$, obteniéndose una ecuación de la forma $f(y, z) = 0$, $x = k$.

3. Simetrías. La obtención de las simetrías de una superficie se hace en forma similar a las curvas planas, así:

a) Si al sustituir x por $-x$ en la ecuación de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ésta no se modifica, la superficie es simétrica respecto al plano yz.

b) Si al sustituir y por $-y$ en la ecuación de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ésta no se modifica, la superficie es simétrica respecto al plano xz.

c) Si al sustituir z por $-z$ en la ecuación de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ésta no se modifica, la superficie es simétrica respecto al plano xy.

d) Si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ésta no se modifica, la superficie es simétrica respecto al eje z.

e) Si al sustituir x por $-x$ y z por $-z$ en la ecuación de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ésta no se modifica, la superficie es simétrica respecto al eje y.

f) Si al sustituir y por $-y$ y z por $-z$ en la ecuación de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ésta no se modifica, la superficie es simétrica respecto al eje x.

d) Si al sustituir x por $-x$, y por $-y$ y z por $-z$ en la ecuación de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ésta no se modifica, la superficie es simétrica respecto al origen.

4. Extensión de la superficie.

   Es importante conocer en la superficie $f(x, y, z) = 0$ los valores posibles de las variables x, y, y z. Las trazas paralelas a los planos coordenados nos pueden brindar información útil para esto, además, de los conocimientos ya adquiridos en la obtención del dominio y el rango de funciones de la forma $f(x, y) = 0$.

Las superficies cilíndricas parabólicas, elípticas, hiperbólicas, las superficies cónicas parabólicas, elípticas, hiperbólicas y la esfera, son algunos tipos de superficies cuádricas ya estudiadas en secciones anteriores. Ahora, veamos otros tipos de superficies cuádricas: El elipsoide, el hiperboloide elíptico de una y dos hojas, el cono elíptico, el paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico.

7.6.1 Elipsoide

Un elipsoide es una cuádrica cuya ecuación es de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$. Transformando la ecuación tenemos:

$$\frac{x^2}{-\frac{D}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{D}{B}} + \frac{z^2}{-\frac{D}{C}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

siendo $a^2 = -\dfrac{D}{A}$, $b^2 = -\dfrac{D}{B}$ y $c^2 = -\dfrac{D}{C}$, coeficientes positivos. Si $a = b$, $b = c$ ó $a = c$ la superficie es un elipsoide de revolución. En el caso $a = b = c$, la superficie es una esfera. Las trazas con los ejes coordenados son (Ver Figura 7.23, izquierda):

Con el plano xy: hacemos $z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que corresponde a una elipse.

Con el plano xz: hacemos $y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, que corresponde a una elipse.

Con el plano yz: hacemos $x = 0$, $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, que corresponde a una elipse.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:

Paralelos al plano xy: hacemos $z = k$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2}$, que corresponde a una elipse.

Paralelos al plano xz: hacemos $y = k$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2}$, que corresponde a una elipse.

Paralelos al plano yz: hacemos $x = k$, $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2}$, que corresponde a una elipse.

La gráfica del elipsoide se muestra en la Figura 7.23.

Noten que en la identificación de las trazas con los planos paralelos, aparece la expresión $1 - \dfrac{k^2}{l^2}$, $l = a, b, c$, que debe ser positiva para que la ecuación de la elipse tenga sentido. Asi, el parámetro k debe estar restricto a la condición $1 - \dfrac{k^2}{l^2} > 0$.

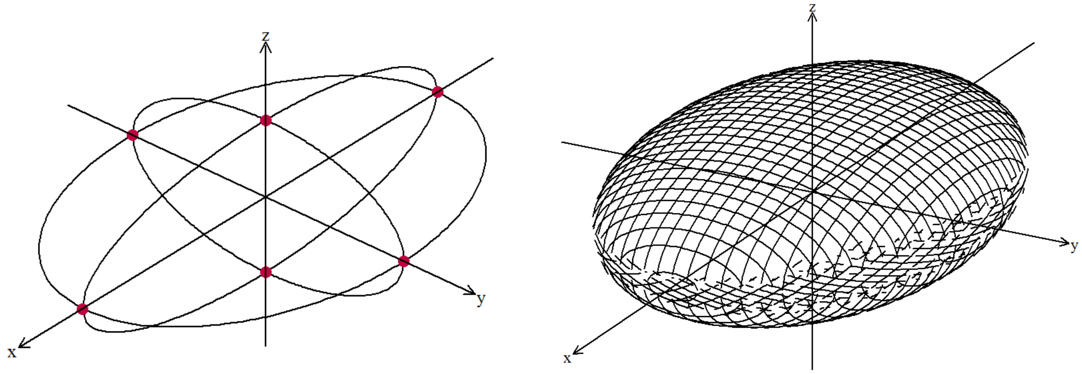


Figura 7.23: Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$: trazas con los planos coordenados

7.6.2 Hiperboloide elíptico de una hoja

En general, la ecuación de un hiperboloide elíptico de una hoja, en su forma canónica, es de una de las siguientes:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ El eje de la superficie es el eje z.}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ El eje de la superficie es el eje y.}$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ El eje de la superficie es el eje x.}$$

Por tanto, en la transformación de la ecuación general $Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$ a $\frac{x^2}{-\frac{D}{A}}+\frac{y^2}{-\frac{D}{B}}+\frac{z^2}{-\frac{D}{C}}=1$, se tiene que uno de los coeficientes $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ ó $-\frac{D}{C}$ es negativo.

Cuando los dos términos positivos son iguales, es un hiperboloide de revolución.

Tomando la expresión de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, las trazas con los ejes coordenados son (Ver Figura 7.24):

Con el plano xy: hacemos $z=0$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, que corresponde a una elipse.

Con el plano xz: hacemos $y=0$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, que corresponde a una hipérbola.

Con el plano yz: hacemos $x=0$, $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, que corresponde a una hipérbola.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:

Paralelos al plano xy: hacemos $z = k$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$, que corresponde a una elipse.La gráfica del Hiperboloide elíptico de una hoja se muestra en la Figura 7.24.

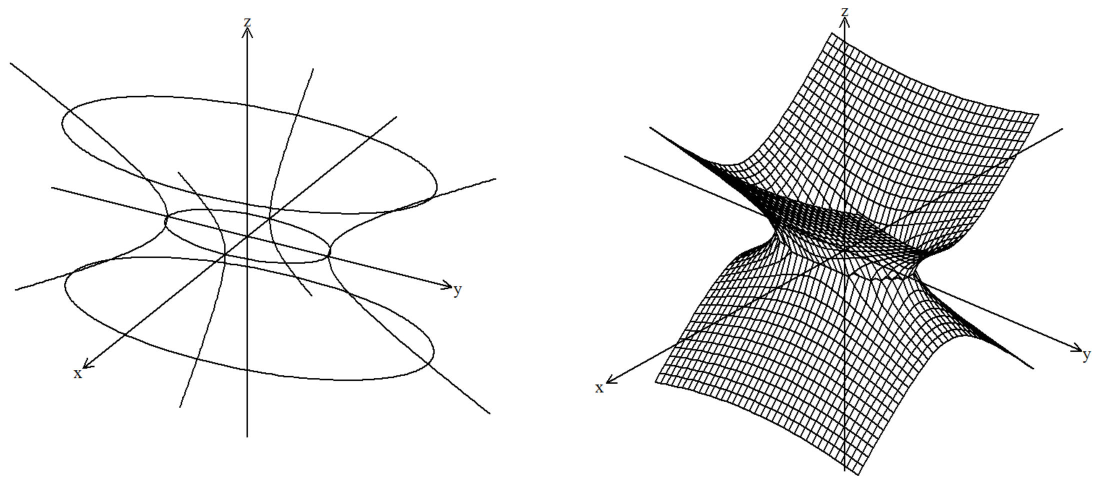


Figura 7.24: Hiperboloide elíptico de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$: trazas con los planos coordenados y con planos paralelos a ellos (izquierda), superficie (Derecha)

7.6.3 Hiperboloide elíptico de dos hojas

En general, la ecuación de un hiperboloide elíptico de dos hojas, en su forma canónica, es de una de las siguientes:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ El eje de la superficie es el eje x.}$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ El eje de la superficie es el eje z.}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ El eje de la superficie es el eje y.}$$

Por tanto, en la transformación de la ecuación general $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ a $\dfrac{x^2}{-\frac{D}{A}} + \dfrac{y^2}{-\frac{D}{B}} + \dfrac{z^2}{-\frac{D}{C}} = 1$, se tiene que dos de los coeficientes $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ o $-\frac{D}{C}$ son negativos.

Tomando la expresión de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, las trazas con los ejes coordenados son (Ver Figura 7.25):

Con el plano xy: Con $z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que corresponde a una hipérbola.

Con el plano xz: Con $y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, que corresponde a una hipérbola.

Con el plano yz: Con $x = 0$, $-\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, no tiene solución en los reales.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:

Paralelos al plano yz: Con $x = k$, $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - 1$, que corresponde a una elipse cuando el parámetro k satisface la condición $\dfrac{k^2}{a^2} - 1 > 0$. La gráfica del Hiperboloide elíptico de dos hojas se muestra en la Figura 7.25.

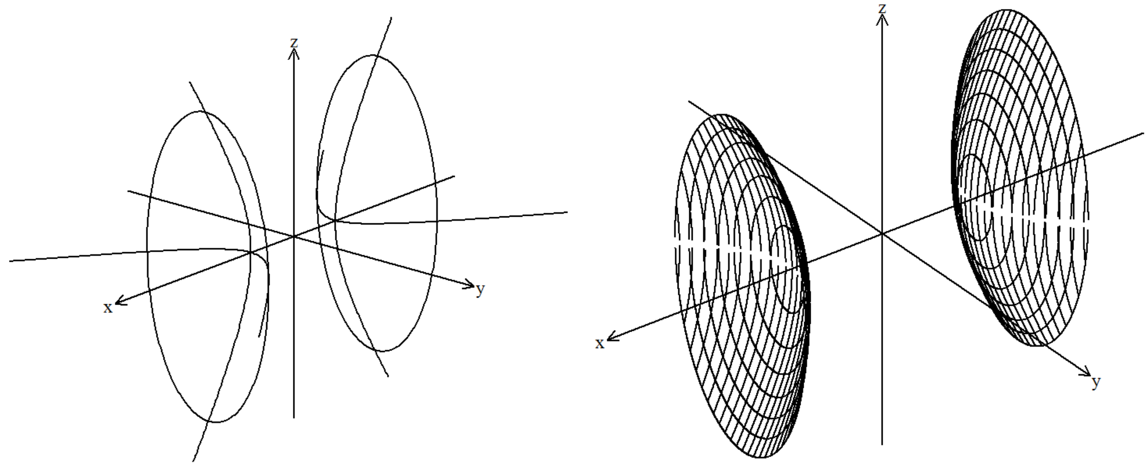


Figura 7.25: Hiperboloide elíptico de dos hojas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$: trazas con los planos coordenados y paralelos (Izquierda), superficie (Derecha)

7.6.4 Cono elíptico

La ecuación de un cono elíptico es de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$, donde uno de los coeficientes A, B, ó C es negativo. Si los dos términos positivos tienen coeficientes iguales, es un cono de revolución.

Transformando la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ a $\dfrac{x^2}{BC} + \dfrac{y^2}{AC} + \dfrac{z^2}{AB} = 0$, si $a^2 = BC$, $b^2 = AC$ y $c^2 = AB$, se tiene que la ecuación de un cono elíptico puede ser una de las siguientes opciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ El eje de la superficie es el eje z.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ El eje de la superficie es el eje y.}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ El eje de la superficie es el eje x.}$$

Tomando, la ecuación de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ tenemos que las trazas con los ejes coordenados son (Ver Figura 7.26):
Con el plano xy: Con $z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, luego $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{-x^2}$ que corresponde al punto, $(0, 0, 0)$.
Con el plano xz: Con $y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, luego $x = \pm\dfrac{a}{c}z$ que corresponde a dos líneas rectas que pasan por el origen.
Con el plano yz: Con $x = 0$, $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, luego $y = \pm\dfrac{b}{c}z$, que corresponde a dos líneas rectas que pasan por el origen.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:
Paralelos al plano xy: Con $z = k$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2}$, que corresponde a una elipse.
Paralelos al plano xz: Con $y = k$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{k^2}{b^2}$, que corresponde a una hipérbola.
Paralelos al plano yz: Con $x = k$, $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -\dfrac{k^2}{a^2}$, que corresponde a una hipérbola.
La gráfica del cono elíptico se muestra en la Figura 7.26.

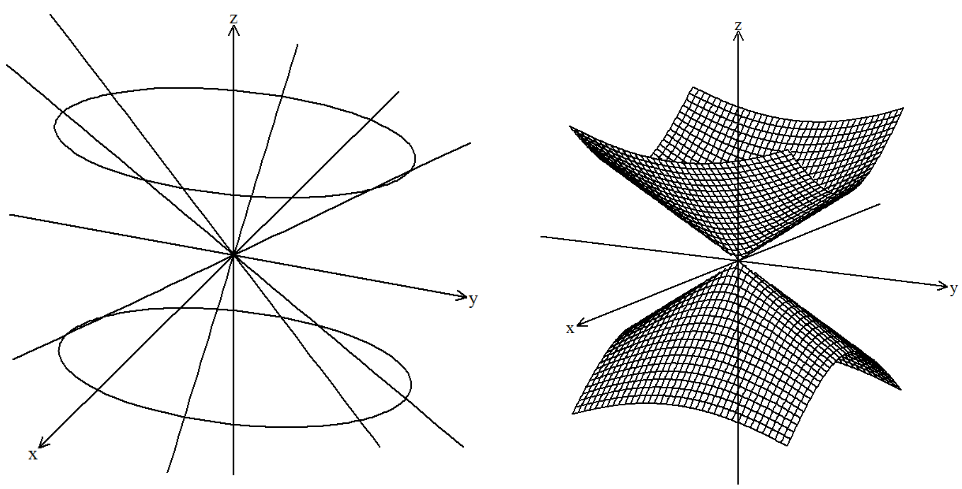


Figura 7.26: Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$: trazas con los planos coordenados y paralelos

7.6.5 Paraboloide elíptico

La ecuación de un paraboloide elíptico es de una de las siguientes formas:

$$Ax^2 + By^2 = Cz \text{ El eje de la superficie es el eje z}$$

$$Ax^2 + Cz^2 = By \text{ El eje de la superficie es el eje y.}$$

$$By^2 + Cz^2 = Ax \text{ El eje de la superficie es el eje x.}$$

Transformando las ecuaciones tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \text{ El eje de la superficie es el eje z.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b} \text{ El eje de la superficie es el eje y.}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a} \text{ El eje de la superficie es el eje x.}$$

Los dos términos de grado dos tiene coeficientes positivos. Si estos coeficientes son iguales, es un paraboloide de revolución.

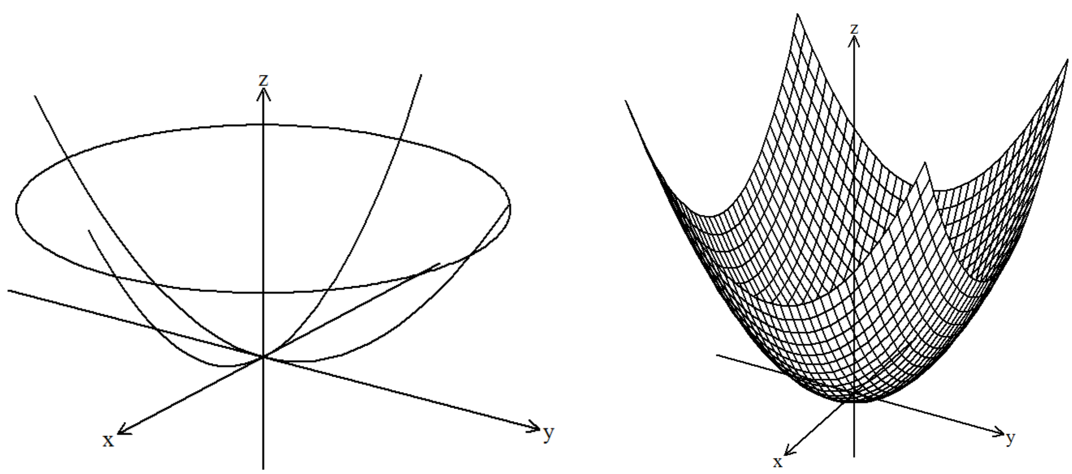


Figura 7.27: Paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$: trazas con los planos coordenados y paralelos (Izquierda), superficie (Derecha)

Tomemos la ecuación de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$ tenemos que las trazas con los ejes coordenados son (Ver Figura 7.27):

Con el plano xy: hacemos $z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, que corresponde al punto $(0, 0, 0)$.

Con el plano xz: hacemos $y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$, que corresponde a una parábola.

Con el plano yz: hacemos $x = 0$, $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c} = 0$, que corresponde a una parábola.

Con planos paralelos a los ejes coordenados: Paralelos al plano xy: hacemos $z = k$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k}{c}$, que corresponde a una elipse.

7.6.6 Paraboloide hiperbólico

La ecuación de un paraboloide hiperbólico es de una de las siguientes formas:

$$Ax^2 - By^2 = Cz \text{ El eje de la superficie es el eje z.}$$

$$Ax^2 - Cz^2 = By \text{ El eje de la superficie es el eje y.}$$

$$By^2 - Cz^2 = Ax \text{ El eje de la superficie es el eje x.}$$

Transformando las ecuaciones tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \text{ El eje de la superficie es el eje z.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{y}{b} \text{ El eje de la superficie es el eje y.}$$

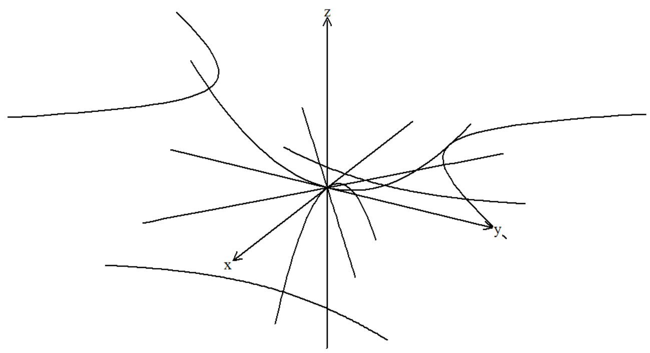
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a} \text{ El eje de la superficie es el eje x.}$$

Los dos términos de grado dos tienen coeficientes de signos contrarios.
Tomemos la ecuación de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$ tenemos que las trazas con los ejes coordenados son (Ver Figura 7.28):

Con el plano xy: con $z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, luego, $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, que corresponde a dos líneas rectas que pasan por el orígen.
Con el plano xz: con $y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$, que corresponde a una parábola.
Con el plano yz: con $x = 0$, $-\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$, que corresponde a una parábola.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:

Paralelos al plano xy: con $z = k$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k}{c}$, que corresponde a una hipérbola. Note que aqui la hipérbola es horizontal si $k > 0$ o vertical si $k < 0$.



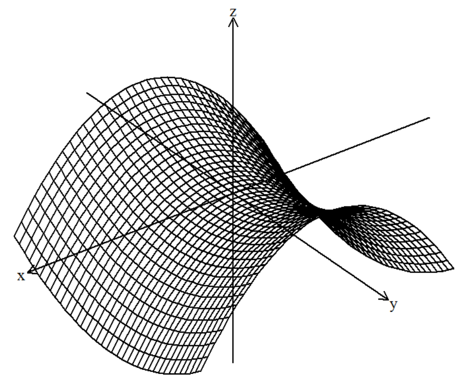


Figura 7.28: Paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \frac{z}{c}$: trazas con los planos coordenados y paralelos (Izquierda), superficie (Derecha)

Ejemplo 7.6.1 *Identificar y bosquejar la gráfica de la superficie* $4z = 9x^2 - y^2$.

Solución Por la forma de la ecuación se trata de un paraboliode hiperbólico, cuyo eje de la superficie es el eje z.

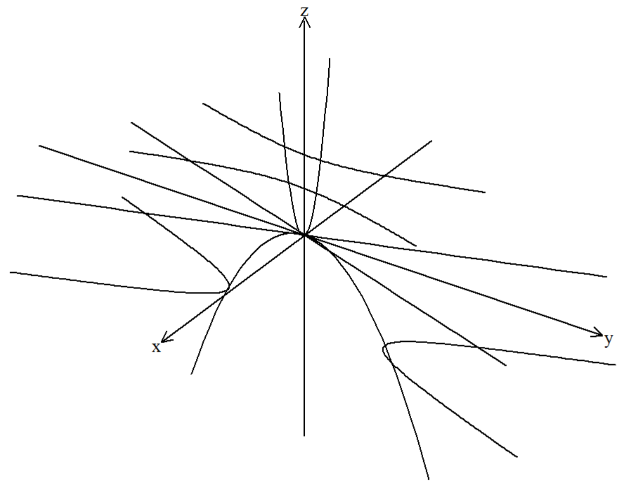
Las trazas con los planos coordenados y con planos paralelos a ellos son:

Con el plano xy: hacemos $z = 0$, $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 0$, luego, $y = \pm 3x$, que corresponde a dos líneas rectas que pasan por el origen.

Con el plano xz: hacemos $y = 0$, $\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{z}{9}$, que corresponde a una parábola con vértice en $(0, 0, 0)$.

Con el plano yz: hacemos $x = 0$, $-\dfrac{y^2}{4} = z$, que corresponde a una parábola con vértice en $(0, 0, 0)$ que abre hacia la parte negativa del eje z.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:
Paralelos al plano xy: con $z = -4$, $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{\frac{16}{9}} = 1$, que corresponde a una hipérbola con centro en $(0, 0, -4)$. Las trazas de la superficie y la superficie muestran en la Figura 7.29.



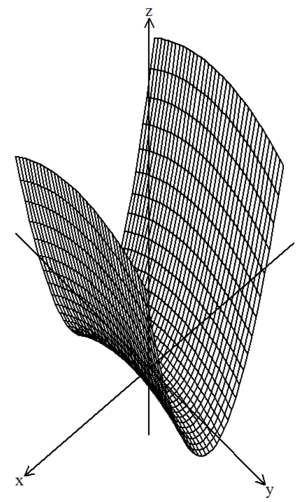


Figura 7.29: Superficie $4z = 9x^2 - y^2$: trazas (izquierda), superficie (Derecha)

Ejemplo 7.6.2 *Identificar y bosquejar la superficie* $x^2 + y^2 - 4 - 2z^2 = 0$.

Solución

La ecuación corresponde a un hiperboloide elíptico de una hoja de revolución, ya que los coeficientes de los términos positivos de segundo grado son iguales.

Las trazas con los ejes coordenados son:
Con el plano xy: hacemos $z = 0$, $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, que corresponde a una circunferencia con centro en $(0, 0, 0)$.

Con el plano xz: hacemos $y = 0$, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$, que corresponde a una hipérbola con centro en $(0, 0, 0)$.

Con el plano yz: hacemos $x = 0$, $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$, que corresponde a una hipérbola con centro en $(0, 0, 0)$.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:
Paralelos al plano xy: hacemos $z = 4$, $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, que corresponde a una circunferencia con centro en $(0, 0, 4)$.

Paralelos al plano xy: hacemos $z = -4$, $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, que corresponde a una circunferencia con centro en $(0, 0, -4)$.
Las trazas de la superficie y la grafica superficie del hiperboloide elíptico de una hoja de revolución $x^2 + y^2 - 4 - 2z^2 = 0$ se muestran en la Figura 7.30.

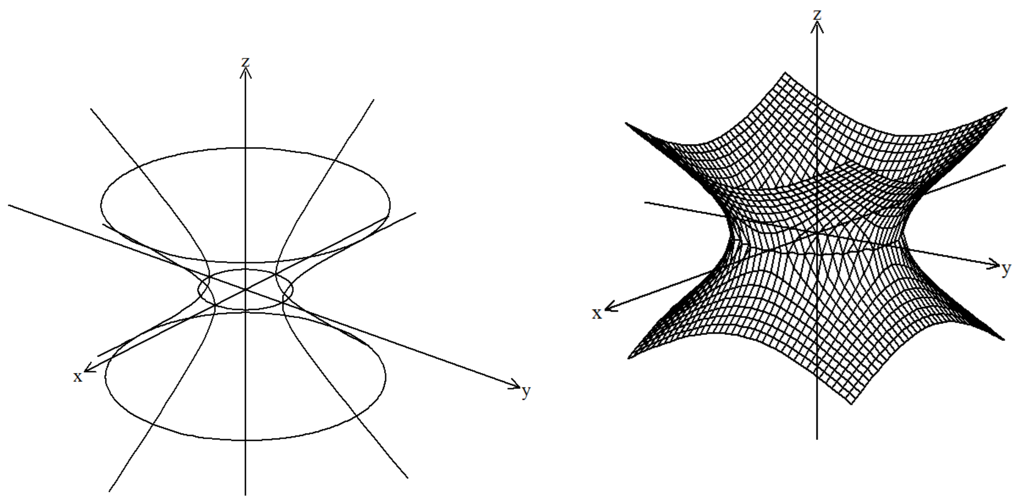


Figura 7.30: Superficie $x^2 + y^2 - 4 - 2z^2 = 0$: trazas (izquierda), superficie (Derecha)

Ejemplo 7.6.3 *Identificar y bosquejar la superficie* $x^2 - y^2 - z^2 - 4x + 4z - 1 = 0$.

Solución

La superficie corresponde a un hiperboloide elíptico de dos hojas, cuyo eje es el eje x. Transformando la expresión completando los trinomios cuadrados perfectos tenemos:

$$(x^2 - 4x + 4) - y^2 - (z^2 - 4z + 4) = 1 + 4 + 4$$

$$(x-2)^2 - y^2 - (z-2)^2 = 9$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{(z-2)^2}{9} = 1$$

Las trazas con los ejes coordenados son (Ver Figura 7.31):

Con el plano xy: hacemos $z = 0$, $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, que corresponde a una hipérbola con centro en $(2, 0, 0)$.

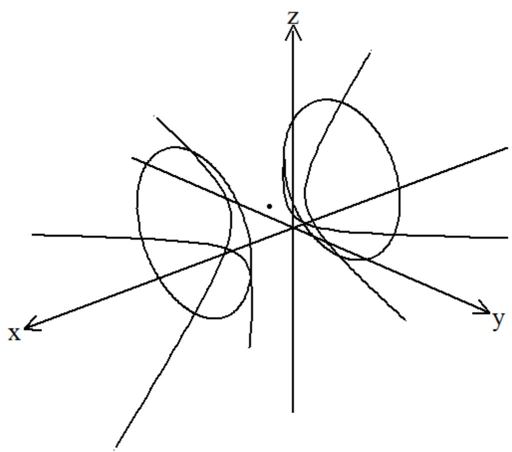
Con el plano xz: hacemos $y = 0$, $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(z-2)^2}{9} = 1$, que corresponde a una hipérbola con centro en $(2, 0, 2)$.

Con el plano yz: hacemos $x = 0$, $-\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{(z-2)^2}{9} = 1$, no tiene solución en los reales.

Con planos paralelos a los ejes coordenados:

Paralelos al plano yz: hacemos $x = 8$, $\dfrac{y^2}{27} + \dfrac{(z-2)^2}{27} = 1$, que corresponde a una elipse con centro en $(8, 0, 2)$.

hacemos también $x = -4$, $\dfrac{y^2}{27} + \dfrac{(z-2)^2}{27} = 1$, que corresponde a una elipse con centro en $(-4, 0, 2)$.
La gráfica del hiperboloide elíptico de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 - 4x + 4z - 1 = 0$ se muestra en la Figura 7.31.



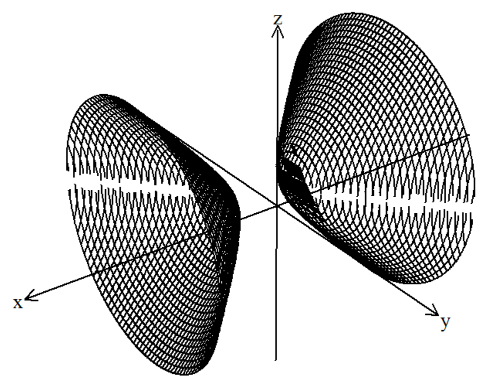


Figura 7.31: Hiperboloide elíptico de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 - 4x + 4z - 1 = 0$: trazas (Izquierda), superficie (Derecha)

Ejercicios Sección 7.6.1

1. Identificar y graficar cada una de las superficies dadas.

a) $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$

b) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 21 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4x - 8y + 8z + 15 = 0$

d) $4x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 12x - 20y + 24z + 77 = 0$

e) $5z^2 - 9x^2 - 15y^2 + 54x + 60y + 20z = 166$

f) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 12y + 3z + 23 = 0$

g) $3x^2 + 4z^2 - 12(y-4)^2 = 0$

h) $y^2 - 4x^2 + 2z - 6y - 12x + 6 = 0$

2. Hallar la ecuación del paraboloide de vértice en el punto $(0, 0, 0)$, que tiene el eje z como eje, y que pasa por los puntos $(2, 0, 3)$ y $(1, 2, 3)$

3. Hallar la ecuación del hiperboloide de una hoja que pasa por los puntos $(4, 2\sqrt{3}, 0)$ y $(-1, 3, \frac{3\sqrt{6}}{2})$, con centro el punto $(0, 0, 0)$, que tiene el eje y como eje de revolución.

4. Hallar la ecuación del elipsoide que pasa por los puntos $(2, -1, 1)$, $(-3, 0, 0)$, $(1, -1, -2)$ con centro en $(0, 0, 0)$

Ejercicios Capítulo 7

1. Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de la curva dada, alrededor del eje indicado. Construya la superficie. (Puede emplear algún software para eso).

a) $2x^2 - 3y^2 = 6, z = 0$; eje y

b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0, z = 0$; eje x

c) $y^2 - 2z^2 + 4z = 9, x = 0$; eje z

d) $y^2 + x - 4 = 0, z = 0$; eje x

2. Identificar y graficar cada una de las superficies dadas.

a) $z^2 + 2y^2 - 4x^2 - 24x - 36 = 0$

b) $3z^2 + 5y^2 - 2x + 10y - 12x + 21 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$

d) $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$

e) $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 18z + 13 = 0$

g) $2x^2 - y^2 + 8z^2 + 8 = 0$

h) $4y^2 + z^2 + 2x = 0$

3. La ecuación de una superficie esférica es $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$. Hallar la ecuación de la superficie esférica concéntrica con ella que es tangente al plano $2x - 3y + 2z + 4 = 0$.

4. Demuestre que el plano tangente Π a la esfera Υ cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

en el punto $T(x_1, y_1, z_1)$ de Υ tiene por ecuación

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{G}{2}(x + x_1) + \frac{H}{2}(y + y_1) + \frac{I}{2}(z + z_1) + J = 0$$

5. Demostrar que el plano radical de dos esferas tangentes es su plano tangente común.

6. Indicar cuál es la intersección de las gráficas cuyas ecuaciones son:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 9 = 0$$

7. Demuestre que la recta de intersección de los planos dados por las ecuaciones:

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{y} \quad 1 + \frac{x}{a} = 0$$

   está sobre el hiperbolóide de una hoja representado por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

CAPÍTULO 8

COORDENADAS ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

CAPÍTULO 8
COORDENADAS ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

Además de las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares, existen otros sistemas de coordenadas muy útiles y que se emplean con mucha frecuencia: las coordenadas cilíndricas y las esféricas.

8.1 Coordenadas cilíndricas

Sea $P(x, y, z)$ las coordenadas de un punto en el espacio y Q, la proyección de P sobre el plano xy, cuyas coordenadas polares son (r, θ) sobre el plano xy (Ver Figura 8.1).

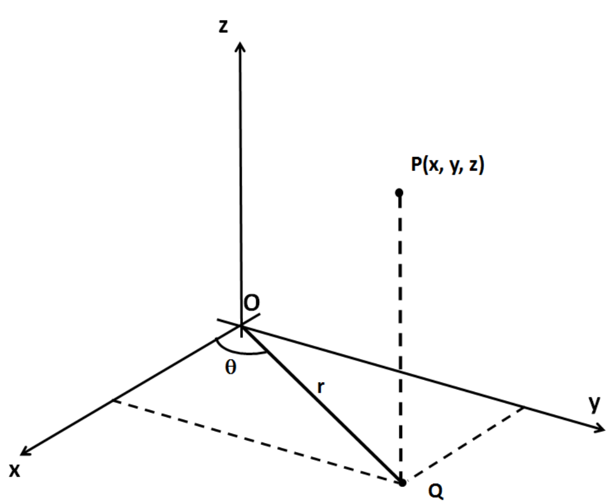


Figura 8.1: Coordenadas cilíndricas de un punto

Las coordenadas cilíndricas de P son (r, θ, z) y se relacionan con las coordenadas rectangulares así:

$$x = r\cos\theta \qquad x = r\sin\theta \qquad z = z$$

Además,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Ejemplo 8.1.1 *Hallar las coordenadas cilíndricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son* $(2, -1, 4)$.

Solución

La situación descrita se muestra en la Figura 8.2.

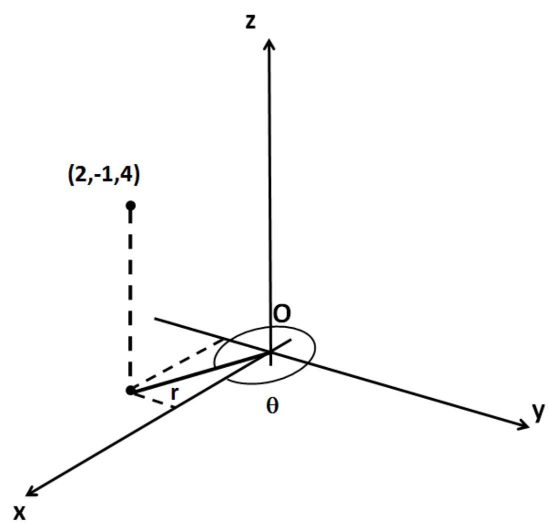


Figura 8.2: Coordenadas cilíndricas del punto $(2, -1, 4)$

Las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) son:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$
$$r = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\tan\theta = \frac{-1}{2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Luego las coordenadas cilíndricas del punto son $\left(\sqrt{5}\,, \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), 4\right)$.

Ejemplo 8.1.2 *Hallar las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas cilíndricas son* $\left(-2, \dfrac{\pi}{4}, 3\right)$.

Solución

La situación dada se muestra en la Figura 8.3.

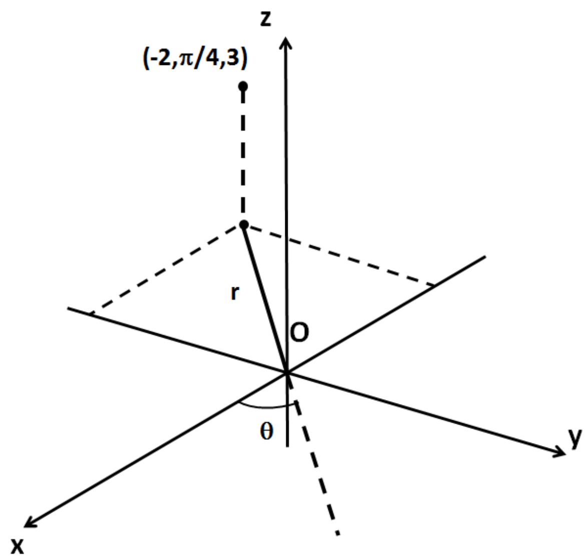


Figura 8.3: Coordenadas rectangulares del punto $\left(-2, \dfrac{\pi}{4}, 3\right)$

Se tiene que

$$x = r\cos\theta \qquad x = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z$$

Sustituyendo los valores de $r = -2$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y $z = 3$, obtenemos:

$$x = -2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \qquad x = -2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \qquad z = 3$$

$$x = -\sqrt{2} \qquad x = -\sqrt{2} \qquad z = 3$$

Luego, las coordenadas rectangulares del punto dado en coordenadas cilíndricas $\left(-2, \dfrac{\pi}{4}, 3\right)$ son $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3)$.

Ejercicios Sección 8.1.1

1. Transformar cada expresión de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas.

a) $(-1, 3, 4)$

b) $(2, -5, 8)$

c) $\left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{1}{2}\right)$

d) $(x^2 + y^2)^2 = z^2(x^2 - y^2)$

2. Transformar cada expresión de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas.

a) $(6, \frac{2\pi}{3}, -2)$

b) $(1, 330°, \pi)$

c) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}, 5\right)$

d) $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 2z^2$

8.2 Coordenadas esféricas

Sea $P(x, y, z)$ las coordenadas de un punto en el espacio y Q, la proyección de P sobre el plano xy. Además, r la medida de OP, ϕ el ángulo que forma OP con el eje z, $0 \leq \phi \leq \pi$ y θ, el ángulo formado por la proyección de OP en el plano xy y el eje x, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

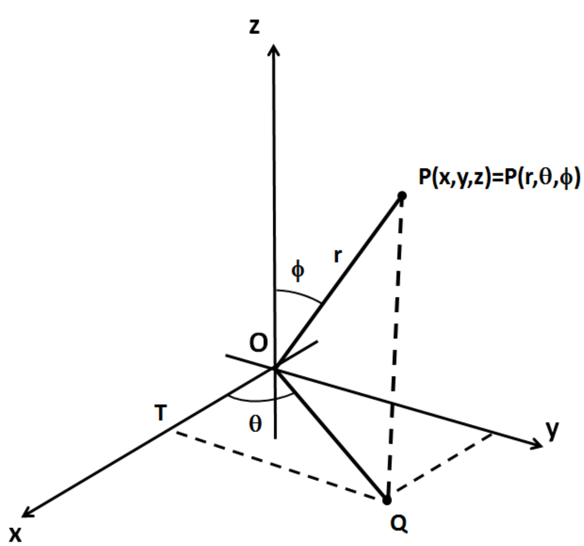


Figura 8.4: Coordenadas esféricas de un punto

Del triángulo OPQ obtenemos:

$$OQ = r \operatorname{sen} \phi \qquad\qquad PQ = r \cos \phi$$

Además, en el triángulo OTQ se tiene que:

$$OT = OQ \cos \theta \qquad\qquad TQ = OQ \operatorname{sen} \theta$$

Luego, con $x = OT$, $y = TQ$ y combinando las expresiones anteriores obtenemos:

$$x = OT = OQ \cos \theta \qquad y = TQ = OQ \operatorname{sen} \theta \qquad z = PQ = r \cos \phi$$

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = r \cos \phi$$

Se deduce además que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Entonces, las coordenadas esféricas del punto $P(x, y, z)$ están dadas por $P(r, \theta, \phi)$.

En muchas situaciones donde se require determinar el área de superficies o de volúmenes limitados por éstas, puede simplificarse la aplicación de los métodos utilizados transformando el problema a coordenadas esféricas o cilíndricas. Cuando la superficie es de revolución, lo más adecuado es realizar transformaciones a coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 8.2.1 *Hallar las coordenadas esféricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son* $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.

Solución

En la Figura 8.5 se muestra la ubicación del punto dado.
Con $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 2\sqrt{3}$ y reemplazando en las expresiones que relacionan las coordenadas rectangulares con las esféricas, tenemos:

$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \quad \phi = \cos^{-1}\left(\tfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2}}\right)$$

$$r = 4 \qquad\qquad \theta = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \phi = \frac{\pi}{6}$$

Entonces, las coordenadas esféricas del punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ son $\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

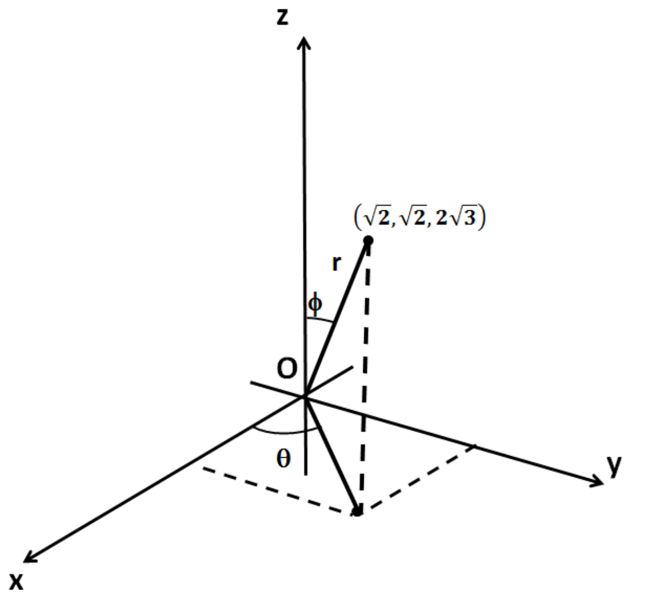


Figura 8.5: Coordenadas esféricas del punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$

Ejemplo 8.2.2 *Hallar las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas esféricas son* $\left(3, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Solución

En la Figura 8.6 se muestra la situación dada.
Sabiendo que $r = 3$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ y $\phi = \dfrac{3\pi}{4}$ obtenemos:

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = r\cos\phi$$

$$x = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad y = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad z = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad y = \frac{3\sqrt{6}}{4} \qquad z = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Las coordenadas rectangulares del punto dado en coordenadas esféricas $\left(3, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ son $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}, \dfrac{3\sqrt{6}}{4}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

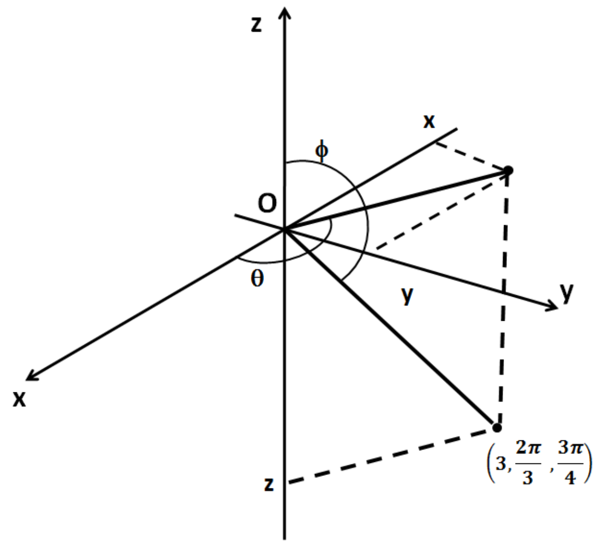


Figura 8.6: Coordenadas rectangulares del punto $\left(3, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

Ejercicios Sección 8.2.1

1. Transformar cada expresión dada de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.

a) $(2, -2, 0)$

b) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $5x^2 - 5y^2 = 4z$

d) $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

e) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 16$

2. Transformar cada expresión dada de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas.

a) $r = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$

b) $r \cos \phi = 4$

c) $\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$

d) $\left(5, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

e) $\left(3, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$

Ejercicios Capítulo 8

1. Hallar las coordenadas cilíndricas de cada punto dado en coordenadas rectangulares.

a) $(-1, 2, 5)$

b) $(2, 0, -2)$

c) $(1, -4, -1)$

d) $(-2, -4, -1)$

e) $(0, 1, 1)$

f) $(1, -2, 2)$

g) $(6, 3, 2)$

h) $(8, -4, 1)$

2. Hallar las coordenadas esféricas para los puntos dados en el ítem anterior.

3. Hallar las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas están dadas.

a) $(1, 45°, 2)$

b) $(2, 120°, 1)$

c) $(1, 30°, -1)$

d) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, -1)$

e) $(\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4}, 1)$

f) $(1, \frac{\pi}{12}, 2)$

g) $(6, \frac{5\pi}{4}, 2)$

h) $(3, 240°, 1)$

4. Hallar las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas esféricas están dadas.

a) $(1, 30°, 45°)$

b) $(2, 120°, 60°)$

c) $(1, 240°, 135°)$

d) $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3})$

e) $(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{4})$

f) $(1, \frac{7\pi}{8}, \frac{2\pi}{3})$

g) $(6, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

h) $(3, 240°, 135°)$

5. Hallar las coordenadas esféricas de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas están dadas.

a) $(8, 120°, 6)$

b) $(4, 30°, -3)$

c) $(6, 135°, 2)$

d) $(3, 150°, 4)$

e) $(12, -90°, 5)$

6. Expresar en coordenadas esféricas las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2 - 4y^2 = 8z$

b) $x^2 - y^2 - z^2 = 12$

c) $4x + 6y - 2z = 6$

d) $2x^2 + 3 - 6z = 0$

7. Expresar en coordenadas cilíndricas las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 2y = 0$

b) $6x^2 - 4y^2 + 2x + 3y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 3y - z + 2$

Bibliografía

[1] KINDLE, Joseph H. Teoría y problemas de geometría analítica plana y del espacio. Primera edición. México: Libros McGraw-Hill, 1970. 150 p. Serie de compendios Schaum.

[2] SERGE LANG, Linear Algebra, Third Edition, Springer Editorial Board, 2000.

[3] LEHMANN, Charles H. Geometría analítica. Primera edición. México: Editorial Limusa, 1980. 495 p.

[4] LEITHOLD, Louis. El cálculo. Séptima edición. México, Oxford university press, 1999. 1360 p.

[5] HAWKING, STEPHEN. Dios creó los números: Los descubrimentos matemáticos que cambiaron la historia. Barcelona: Crítica (2010).

[6] STEWART, James. Cálculo. Trascendentes tempranas. Sexta edición. México: Cengage Learning, 2008. 1280 p.

[7] URIBE C, Julio. Geometría analítica y vectorial. Tercera edición. Medellín: Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. Facultad de Ciencias, 2000. 505 p.

[8] WOOTON, William. BECKENBACH, Edwin. FLEMING, Frank. Geometría analítica moderna. Primera edición. México: Publicaciones cultural S.A., 1979. 440 p.

Índice de figuras

Indice alfabético

John Alexander Pérez

Posdoctorado en el Programa de Pesquisador de Pós-Doutorado (PPPD), del Instituto de Matemática Aplicada Estadística y Computación Científica (IMECC) de la Universidad Estatal de Campinas (UNICAMP) y Doctor en Matemática Aplicada de la misma universidad. Asimismo, posee una Maestría en Matemática Aplicada de la Universidad EAFIT; es Especialista en Matemática Avanzada de la Universidad Nacional de Colombia y Matemático de la misma universidad. Actualmente se profesor asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM-

jhonperez@itm.edu.co

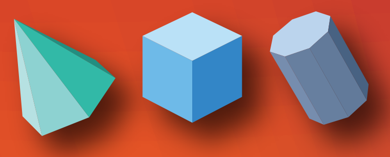
Juan Guillermo Paniagua

Maestría en Ingeniería de la misma universidad EAFIT, Maestría en Educación y Desarrollo Humano en el convenio CINDE–Universidad de Manizales; asimismo, es Especialista en Didáctica de las Ciencias, de la Universidad Pontificia Bolivariana, Especialista Tecnológico en Diseño de Redes a Gas, del Instituto Tecnológico Pascual Bravo e Ingeniero Mecánico de la Universidad de Antioquia. Actualmente es profesor asistente del Instituto Tecnológico Metropolitano –ITM-.

juanpaniagua@itm.edu.co

TEXTOS ACADÉMICOS

Geometría Analítica e introducción al Cálculo Vectorial



Este texto presenta una compilación de conceptos básicos de la geometría analítica y del nivel introductorio al cálculo vectorial. Está complementado con variados ejemplos que le brinda al estudiante la posibilidad de aprender de una manera sencilla y que le sirve como aprestamiento para cursos más avanzados. Asimismo, propone ejercicios con el fin de afianzar los conceptos aprendidos. En suma, el libro, consideramos es una base fundamental de la matemática para la fundamentación de un tecnólogo o ingeniero.

This text presents a compilation of basic concepts of analytical geometry and introductory level vector calculus. The text is complemented with several examples, which gives the student the possibility to learn in a simple manner and at the same time is the basis for more advanced courses. In addition, this text contains exercises in order to strengthen the concepts learned. Ultimately, we see this book as a basic foundation of mathematics for the grounding of a technologist or an engineer.

ITM
Institución Universitaria
Acreditada en Alta Calidad

ISBN: 978-958-8743-97-4